

**Билјана Крстеска**

**Јасмина Маркоска**

**Рецензенти**

**Д-р Анета Гацовска - Барандовска,**

Природно-математички факултет, УКИМ, Скопје

**Раде Кренков,**

СОУУД „Димитар Влахов“, Струмица

**Јагода Танушоска,**

СУГС „Лазар Танев“, Скопје.

Илустрации: Авторите

Лектура: Виолета Јовановска

Со одлука за одобрување на учебникот МАТЕМАТИКА, за II година на средното стручно четиригодишно образование (Геолошко-рударска и металуршка струка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска струка/Градежништво и геодезија, Графичка струка/Графичарство, Економско правна и трговска струка/Економија, право и трговија, Електротехничка струка/Електротехника, Лични услуги, Машинска струка/Машинство, Сообраќајна струка/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска струка/ Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка струка/Угостителство и туризам и Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија) бр. 26-306/1 од 8.7.2022 година донесена од Националната комисија за учебници.

**CIP**

## ПРЕДГОВОР

Учебникот **МАТЕМАТИКА** за втора година на средното стручно четиригодишно образование е пишуван според наставната програма за истоимениот задолжителен предмет. Наменет е за учениците од Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско-туристичка и Хемиско-технолошка струка.

Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на програмата. Учебникот е модулarno дизајниран и се состои од осум тематски целини:

- КОРЕНИ
- ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК
- КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ
- КВАДРАТНА РАВЕНКА
- РАВЕНКИ ОД КВАДРАТЕН ВИД, ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ, СИСТЕМ ОД ЕДНА КВАДРАТНА И ЕДНА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ
- КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА, СИСТЕМ И ВКУПНОСТ ОД ДВЕ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА
- ВЕКТОРИ ВО РАМНИНА, ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО ПРОСТОР
- ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини, кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, што претставува продолжување на работата на часот, а на крајот од секоја наставна тема дадени се задачи за повторување и утврдување на материјалот. Решенијата и одговорите на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање, дадени се на крајот од учебникот.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

Авторите

# 1. КОРЕНИ

## 1.1. Поим за корен

Поимите квадратен и кубен корен од даден позитивен број веќе ти се познати од основното образование. Останува да го прошириме тој поим до поим за  $n$ -ти корен од реален број.

**Дефиниција.** Позитивниот реален број  $x$ , за кој важи  $x^n = a$ , каде  $a$  е позитивен реален број и  $n \in \mathbb{N}$  се вика  **$n$ -ти корен од бројот  $a$**  и се означува со  $x = \sqrt[n]{a}$ .

Притоа,  $n$  се вика **коренов показател**, а  $a$  се вика **поткоренов израз** или **радиканд**.

**Пример 1.** Коренот  $\sqrt[4]{16}$  има коренов показател 4, поткоренов израз 16 и  $\sqrt[4]{16} = 2$ , бидејќи  $2^4 = 16$ , а  $\sqrt[5]{100000} = 10$ , бидејќи  $10^5 = 100000$ . ♦

Операцијата со која ја одредуваме вредноста на  $\sqrt[n]{a}$  кога ни се познати вредностите на  $n$  и  $a$ , се нарекува **коренување**.

Ако  $n = 2$ , тогаш наместо  $\sqrt[2]{6}$  пишуваме  $\sqrt{6}$  и читаме **квадратен корен** од бројот 6 или само **корен** од бројот 6.

**Задача 1.** Пресметај:

**а)**  $\sqrt{25}$ , **б)**  $\sqrt[3]{27}$ , **в)**  $\sqrt[4]{81}$ .

**Решение.** **а)**  $\sqrt{25} = 5$  бидејќи  $5^2 = 25$ , **б)**  $\sqrt[3]{27} = 3$  бидејќи  $3^3 = 27$ , **в)**  $\sqrt[4]{81} = 3$  бидејќи  $3^4 = 81$ . ♦

Од дефиницијата следува дека  $\sqrt[n]{a}$ , каде  $a > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$  е таков позитивен број чиј  $n$ -ти степен е еднаков на  $a$  т.е.  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .

Слично и  $\sqrt[n]{a^n} = a$ , каде  $a > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$ , бидејќи  $a^n = (a)^n$ .

**Пример 2.**  $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$  и  $\sqrt[6]{b^6} = b$ , за  $b > 0$ . ♦

Нека  $n$  е парен природен број. Можни се следните ситуации:

- Ако  $a > 0$ , тогаш постојат два спротивни реални броеви за кои важи се  $x^n = a$  и со  $\sqrt[n]{a}$  го означуваме позитивниот број (го нарекуваме  **$n$ -ти корен од бројот  $a$** ), а со  $-\sqrt[n]{a}$  неговиот спротивен број.
- Ако  $a = 0$ , тогаш постои единствен реален број  $x$  (бројот 0) т.ш.  $x = \sqrt[n]{0}$ .
- Ако  $a < 0$ , тогаш не постои реален број  $x$ , таков што  $x^n = a$ , па според тоа изразот  $\sqrt[n]{a}$  нема смисла.

Нека  $n$  е непарен природен број. Тогаш постои единствен реален број  $x$  таков што  $x^n = a$ , за произволен реален број  $a$ .

**Пример 3.** Корените  $\sqrt{-4}$ ,  $\sqrt[4]{-16}$  и  $\sqrt[8]{-32}$  немаат смисла во множеството реални броеви, корените  $\sqrt[3]{-343}$ ,  $\sqrt[15]{-1}$  и  $\sqrt[7]{-128}$  имаат смисла и може да се пресметаат, а коренот  $\sqrt[6]{x+2}$  има смисла за сите реални броеви  $x$  за кои важи  $x+2 \geq 0$  т.е.  $x \geq -2$ . ♦

Според тоа за  $n$  парен природен број важи следното правило:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & \text{за } a \geq 0 \\ -a, & \text{за } a < 0 \end{cases}$$

Кога  $n$  е непарен природен број важи  $\sqrt[n]{a^n} = a$ , за секој реален број  $a$ .

**Задача 2.** Упрости ги изразите:

**а)**  $\sqrt[4]{(-3)^4}$ , **б)**  $\sqrt[12]{(-1)^{12}}$ , **в)**  $\sqrt[6]{4^6}$ , **г)**  $\sqrt[3]{(-2)^3}$ , **д)**  $\sqrt{(x+1)^2}$ .

**Решение. а)**  $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ , бидејќи  $n = 4$  е парен број и  $a = -3 < 0$ ,

**б)**  $\sqrt[12]{(-1)^{12}} = |-1| = 1$ , бидејќи  $n = 12$  и  $a = -1 < 0$ ,

**в)**  $\sqrt[6]{4^6} = 4$ , бидејќи  $n = 6$  и  $a = 4 \geq 0$ ,

**г)**  $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ , бидејќи  $n = 3$  е непарен број,

**д)**  $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{за } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{за } x < -1 \end{cases}$ . ♦

### Задачи

**1.** Пресметај:

**а)**  $\sqrt{121}$ , **б)**  $\sqrt[4]{0,0016}$ , **в)**  $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$ , **г)**  $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ .

**2.** Кои од следните корени имаат смисла во множеството реални броеви?

**а)**  $\sqrt[4]{-0,01}$ , **б)**  $\sqrt[3]{-125}$ , **в)**  $\sqrt[6]{\frac{6^2}{(-2)^3}}$ , **г)**  $\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}$ .

**3.** Кои од следните корени немаат смисла во множеството реални броеви?

**а)**  $\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{5}}$ , **б)**  $\sqrt[3]{3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$ , **в)**  $\sqrt[4]{0,01 - 0,0(1)}$ , **г)**  $\sqrt[12]{\frac{1}{2,3 - 7^2}}$

**4.** За кои вредност на поткореновиот израз, коренот има смисла?

**а)**  $\sqrt[5]{2x+3}$ , **б)**  $\sqrt[4]{20+4x}$ , **в)**  $\sqrt[3]{2x+1}$ , **г)**  $\sqrt[6]{(x-2)(x+3)}$

**5.** Упрости:

**а)**  $\sqrt[4]{(-2)^4}$ , **б)**  $\sqrt{\frac{1600}{(-200)^2}}$ , **в)**  $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^3}$ , **г)**  $\sqrt{(16-2x)^2}$ , за  $x \geq 8$ .

## 1.2. Проширување и скратување корени

Во продолжение ќе разгледаме неколку својства на корените со чија помош во иднина ќе можеме да вршиме трансформации и упростувања.

**Теорема.** Ако  $a$  е позитивен реален број, а  $m, n$  и  $k$  се природни броеви, тогаш важи  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$  (**проширување** на коренот  $\sqrt[n]{a^m}$  со природниот број  $k$ ).

Навистина, за  $nk$ -от степен на бројот  $\sqrt[n]{a^m}$  имаме:

$$(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = \left( \left( \sqrt[n]{a^m} \right)^n \right)^k = (a^m)^k = a^{mk}.$$

Според дефиницијата за корен следува дека  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$ . ♦

**Пример 1.** Коренот  $\sqrt[3]{2}$  проширен со 5 е  $\sqrt[3 \cdot 5]{2^{1 \cdot 5}} = \sqrt[15]{2^5}$ , додека пак коренот  $\sqrt{3^5}$  проширен со 2 е  $\sqrt[2 \cdot 5]{3^{5 \cdot 2}} = \sqrt[10]{3^{10}}$ . ♦

**Задача 1.** Корените  $\sqrt[3]{ab^2}$  и  $\sqrt[4]{a^3b}$  прошири ги до најмалиот заеднички коренов показател, каде  $a, b > 0$

**Решение.** Од тоа што  $HЗС(3, 4) = 12$  се добива дека првиот корен треба да се прошири со 4, а вториот со 3, па се добиваат корените

$$\sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{(ab^2)^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{a^4b^8} \text{ и } \sqrt[4]{a^3b} = \sqrt[4 \cdot 3]{(a^3b)^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{a^9b^3}, \text{ соодветно. } \blacklozenge$$

Слично на претходната теорема се докажува и следната:

**Теорема.** Ако  $a$  е позитивен реален број, а  $m, n$  и  $k$  се природни броеви такви што  $k | n$  и  $k | m$ , тогаш  $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$  (**скратување** на коренот  $\sqrt[n]{a^m}$  со природниот број  $k$ ).

**Пример 2.** Коренот  $\sqrt[9]{27}$  може да се скрати со 3, па се добива коренот  $\sqrt[9 \cdot 3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{3}$ , а коренот  $\sqrt[12]{2^4}$  може да се скрати со 4 до коренот  $\sqrt[12 \cdot 4]{2^{4 \cdot 4}} = \sqrt[3]{2}$ . ♦

**Задача 2.** Корените  $\sqrt[15]{a^{10}b^5}$  и  $\sqrt[20]{a^{35}b^{10}}$  скрати ги со најголемиот заеднички коренов показател, каде  $a, b > 0$ . ♦

**Решение.** Бидејќи  $HЗД(15, 20) = 5$  корените ќе ги скратиме со 5 и имаме

$$\sqrt[15]{a^{10}b^5} = \sqrt[15 \cdot 5]{(a^2b)^{5 \cdot 5}} = \sqrt[75]{(a^2b)^{25}} = \sqrt[3]{a^2b} \text{ и } \sqrt[20]{a^{35}b^{10}} = \sqrt[20 \cdot 5]{(a^7b^2)^{5 \cdot 5}} = \sqrt[100]{(a^7b^2)^{25}} = \sqrt[4]{a^7b^2},$$

соодветно. ♦

**Пример 3.**  $\sqrt[9]{(-2)^{15}} = \sqrt[3]{(-2)^5}$ , но  $\sqrt[8]{(-2)^{12}} \neq \sqrt[4]{(-2)^3}$ , бидејќи  $\sqrt[4]{(-2)^3}$  нема смисла во множеството реални броеви, туку  $\sqrt[8]{(-2)^{12}} = \sqrt{2^3}$ . ♦

Затоа во вакви ситуации т.е. кога  $a < 0$ ,  $n$  и  $k$  се парни, а  $m$  непарен природен број при скратување на коренот секогаш треба да имаме предвид дали коренот после скратување има смисла во множеството реални броеви, односно треба да го користиме равенството  $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{|a|^m}$ .

**Задачи**

1. Дадените корени прошири ги со 3:

а)  $\sqrt[5]{3^4}$ , б)  $\sqrt[3]{a^2b}$ , за  $a, b > 0$ , в)  $\sqrt[4]{(-2x)^2 y^3}$ , за  $x, y > 0$ .

2. Дадените корени скрати ги со 4:

а)  $\sqrt[8]{16}$ , б)  $\sqrt[16]{a^{20}b^8}$ , за  $a, b > 0$ , в)  $\sqrt[4]{(-4x^{12})^{20} y^{16}}$ , за  $x, y > 0$ .

3. Дадените корени прошири ги соодветно до најмалиот заеднички содржател на нивните коренови показатели:

а)  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt[4]{4}$ , б)  $\sqrt[6]{\frac{a^2b}{3}}, \sqrt[4]{\frac{ab^2}{4}}$  и  $\sqrt[3]{2ab}$ , за  $a, b > 0$ .

4. Дадените корени скрати ги со најголемиот заеднички делител на нивните коренови показатели:

а)  $\sqrt[3]{27a^6}, \sqrt[9]{8a^9b^3}$  и  $\sqrt[6]{125b^9}$ , за  $a, b > 0$ ,

б)  $\sqrt[6]{9a^4b^8}, \sqrt[8]{81a^6b^{12}}$  и  $\sqrt[4]{a^{10}b^2}$ , за  $a, b > 0$ .

5. Скрати ги корените:

а)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^6}$ , б)  $\sqrt[4]{a^2}$ , в)  $\sqrt[6]{\frac{4a^2 + 4a + 1}{0,04a^4b^2}}$ , за  $a, b \neq 0$ .

**1.3. Коренување на производ и количник**

**Теорема.** Ако  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви и  $n$  е природен број, тогаш  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  и  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ .

**Навистина,** за  $n$ -от степен на  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  имаме:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b,$$

а за  $n$ -от степен на  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  имаме:  $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$

Според дефиницијата за корен ова значи дека  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  и  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ . ♦

**Пример 1.**  $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$ . ♦

Имајќи го предвид фактот дека корен со парен показател нема смисла во множеството реални броеви ако поткореновиот израз е негативен број, секогаш кога

$a < 0$ ,  $b < 0$  и  $n$  е парен природен број, важи  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$  и  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$ .

Познато е дека ако  $n$  е непарен природен број,  $\sqrt[n]{a}$  постои за секој реален број  $a$ , па според тоа равенствата од теоремата се користат без апсолутна вредност.

**Задача 1.** Упрости го изразот:

**а)**  $\sqrt[4]{16a^8}$ , за  $a \neq 0$ , **б)**  $\sqrt[5]{\frac{a^{35}}{-b^{10}}}$ , за  $b \neq 0$ .

**Решение. а)**  $\sqrt[4]{16a^8} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{a^8} = 2 \cdot a^2$ , **б)**  $\sqrt[5]{\frac{a^{35}}{-b^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{a^{35}}}{\sqrt[5]{-b^{10}}} = -\frac{a^7}{b^2} \cdot \blacklozenge$

**Пример 2.** Вредноста на  $\sqrt{(-36) \cdot (-49)} = \sqrt{|36|} \cdot \sqrt{|-49|} = 6 \cdot 7 = 42$ , а за  $a < 0$  се добива  $\sqrt{-\frac{25}{16}a} = \sqrt{\left|-\frac{25}{16}\right|} \cdot \sqrt{|a|} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{|a|} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{|a|} \cdot \blacklozenge$

**Задача 2.** Пресметај ја вредноста на изразот: **а)**  $\sqrt[4]{81 \cdot (-1) \cdot (-x^8)}$

**б)**  $\sqrt[3]{(-8) \cdot (-64) \cdot (-125)}$ .

**Решение. а)**  $\sqrt[4]{81 \cdot (-1) \cdot (-x^8)} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{|-1|} \cdot \sqrt[4]{|-x^8|} = 3 \cdot 1 \cdot x^2 = 3x^2$ ,

**б)**  $\sqrt[3]{(-8) \cdot (-64) \cdot (-125)} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{-64} \cdot \sqrt[3]{-125} = -2 \cdot (-4) \cdot (-5) = -40 \cdot \blacklozenge$

**Задача 3.** За кои вредности на променливата  $x$  важат следните равенства?

**а)**  $\sqrt{x \cdot (x+1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$ ,

**б)**  $\sqrt{x \cdot (x^2+1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+1}$ ,

**в)**  $\sqrt[3]{x \cdot (x^2+2)} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+2}$ .

**Решение. а)** Мора сите корени да имаат смисла во множеството реални броеви, па затоа го бараме пресекот од интервалите кои се решенија на неравенките  $x > 0$ ,  $x+1 > 0$  и  $x \cdot (x+1) > 0$  т.е.  $x > 0$ ,

**б)** Бидејќи  $x^2+1 > 0$  за секоја вредност на  $x \in \mathbb{R}$ , мора  $x > 0$ ,

**в)** За секоја вредност на променливата  $x \cdot \blacklozenge$

**Задача 4.** Пресметај ја вредноста на изразот:

**а)**  $\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{5-\frac{1}{2}}$ , **б)**  $\sqrt[4]{12a^5} : \sqrt[4]{3a^2}$ , за  $a > 0$ .

**Решение.** Според теоремата имаме:

**а)**  $\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{5-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{1}{2}\right)} =$   
 $= \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{3}{2},$

**б)**  $\sqrt[4]{12a^5} : \sqrt[4]{3a^2} = \sqrt[4]{\frac{12a^5}{3a^2}} = \sqrt[4]{4a^3}$ , за  $a > 0 \cdot \blacklozenge$

Значи, од друга страна, равенствата  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$  и  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ , за  $a$  и  $b$  позитивни

реални броеви и  $n$  е природен број и  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$  и  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$ , за  $a$  и  $b$  негати-

тивни реални броеви и  $n$  е парен природен број, ги нарекуваме правила за множење и делење на корени кои имаат ист коренов показател.

**Пример 3.** Производот  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$  може да се пресмета само ако корените имаат ист коренов показател, па соодветно ги прошируваме до најмалиот заеднички содржател на кореновите показатели т.е. бројот 6. На овој начин производот се трансформира до  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \blacklozenge$

### Задачи

1. Пресметај:

а)  $\sqrt{16 \cdot 25 \cdot 64}$ , б)  $\sqrt[3]{1000 \cdot a^3}$ ,  
 в)  $\sqrt{\frac{0,01}{441}}$ , г)  $\sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{b^{20}c^{10}}}$ , за  $b, c \neq 0$ .

2. Пресметај:

а)  $\sqrt{a^3b^2} \cdot \sqrt{a^7b^5c^4}$ , за  $a, b, c > 0$ , б)  $\sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{6a^2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$ .  
 в)  $\sqrt[5]{4a^2b^3} : \sqrt[5]{2ab}$ , за  $a, b \neq 0$ , г)  $\sqrt[4]{32a^5b^3} : \sqrt[4]{2a^4b^5}$ , за  $a, b > 0$ .

3. Пресметај:

а)  $\sqrt{64 \cdot (-25) \cdot (-36)}$ , б)  $\sqrt[4]{\frac{-81}{x}}$ , за  $x < 0$ ,  
 в)  $\sqrt[5]{\frac{-32x^5y^{15}}{z^{20}}}$ , за  $z \neq 0$ , г)  $\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x(x^2+1)^2}}$ , за  $x > 0$ .

4. Пресметај:

а)  $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{3x^2y}$ , за  $x, y > 0$ , б)  $\sqrt[3]{4x^2y} : \sqrt[6]{2xy^3}$ , за  $x, y > 0$ .

5. Одреди за која вредност на променливата  $x$  важат равенствата:

а)  $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ , б)  $\sqrt{x^2(x-1)^2} = x \cdot (x-1)$ ,  
 в)  $\sqrt[4]{\frac{1}{(x+1)^4}} = \frac{1}{|x+1|}$ , г)  $\sqrt[3]{\frac{x}{3x+1}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{3x+1}}$ .



### 1.4. Извлекување множител пред знакот на корен, внесување множител под знакот на корен и нормален вид на корен

Ако во коренот  $\sqrt[n]{A}$ , поткореновиот израз  $A$  може да се запише во облик  $a^{m \cdot n} \cdot b$ , каде  $a, b > 0$ , а  $m$  и  $n$  се природни броеви, тогаш може да се применат теоремите за коренување на производ  $\sqrt[n]{a^{m \cdot n}} \cdot \sqrt[n]{b}$  и скратување на даден корен  $a^m \cdot \sqrt[n]{b}$ . Трансформацијата која ја вршиме на овој начин се нарекува **извлекување множител пред знакот на корен**.

За  $n$ -от степен на  $a^m \cdot \sqrt[n]{b}$  имаме:

$$(a^m \cdot \sqrt[n]{b})^n = (a^m)^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a^{m \cdot n} \cdot b.$$

Според дефиницијата за корен важи  $\sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$ . Според тоа важи следнава:

**Теорема.** Ако  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви, а  $n$  и  $m$  се природни броеви, тогаш важи  $\sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$ .

Специјално, ако  $m = 1$ , тогаш  $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ .

**Пример 1.** Нека  $a, b, c > 0$ . Тогаш

а)  $\sqrt[3]{8a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^3 \cdot c^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{c^2} = 2ab\sqrt[3]{ac^2}$  и велиме дека  $2ab$  е множител кој е извлечен пред знакот на коренот  $\sqrt[3]{ac^2}$ ,

б)  $\sqrt{28a^3b^5} = \sqrt{2^2 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^{2 \cdot 2} \cdot b} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^{2 \cdot 2}} \cdot \sqrt{b} = 2ab^2\sqrt{7ab}$  и велиме дека  $2ab^2$  е множител кој е извлечен пред знакот на коренот  $\sqrt{7ab}$ ,

в)  $\sqrt[3]{\frac{a^3b^4}{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^4} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{c^{2 \cdot 3}}} = \frac{ab\sqrt[3]{b}}{5c^2}$  и велиме дека  $\frac{ab}{5c^2}$  е множител кој е извлечен пред знакот на коренот  $\sqrt[3]{b}$ ,

г)  $\sqrt[4]{48 \cdot (x-1)^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot (x-1)^4} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{(x-1)^4} = 2|x-1|\sqrt[4]{3}$  и велиме дека  $2|x-1|$  е множител кој е извлечен пред знакот на коренот  $\sqrt[4]{3}$ . ♦

При решавањето на некои задачи се јавува потреба множителот, кој се наоѓа пред знакот на корен, да го внесеме под знакот на коренот. За таа цел тој множител го степенуваме со кореновиот показател и добиениот израз потоа го множиме со поткореновата величина. Оваа трансформација се нарекува **внесување множител под знакот на корен** и важи следната:

**Теорема.** Ако  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви, а  $n$  и  $m$  се природни броеви, тогаш важи  $a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b}$ .

**Пример 2. а)**  $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27}$ ,

$$\text{б)} a^3\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^5},$$

$$\text{в)} ab\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \sqrt{(ab)^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \sqrt{(ab)^2 \cdot \frac{a+b}{ab}} = \sqrt{ab(a+b)}, \text{ за } a, b > 0,$$

$$\text{г)} \frac{1}{x^2} \sqrt[4]{\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^9}}, \text{ за } x > 0. \blacklozenge$$

**Дефиниција.** Даден корен велиме дека е во **нормален вид**, ако поткореновиот израз не содржи именител и множители кои можат да се извлечат пред знакот на корен, и има најмал можен коренов показател.

**Пример 3.** Во нормален вид се корените  $\sqrt{6}$ ,  $3a\sqrt[3]{2a^2}$  и  $\sqrt[4]{4a^3}$ , за  $a > 0$ , но не се во нормален вид следните корени  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\sqrt[9]{8a^6}$  и  $\sqrt[4]{16x}$ , за  $x > 0$ .

$$\text{Пример 4. а)} 2a\sqrt{\frac{3}{a}} = 2a\sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{a}{a}} = 2a\sqrt{\frac{3a}{a^2}} = 2a \cdot \frac{1}{a} \sqrt{3a} = 2\sqrt{3a}, \text{ за } a > 0,$$

$$\text{б)} \sqrt[4]{\frac{4a^2b^4}{(a^2-1)^2}} = \sqrt[4]{\frac{2^2a^2b^4}{(a^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{2ab^2}{(a^2-1)} \cdot \frac{(a^2-1)}{(a^2-1)}} = \frac{b}{a^2-1} \sqrt{2a(a^2-1)}, \text{ за } a > 1 \text{ и}$$

$b > 0$ ,

$$\text{в)} \sqrt{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a-1+1}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a}{a^2-1} \cdot \frac{a^2-1}{a^2-1}} = \frac{1}{a^2-1} \sqrt{a(a^2-1)},$$

за  $a > 1$ ,

$$\text{г)} \frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a^4-a^3}{b^4-b^3}} = \frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a^3(a-1)}{b^3(b-1)}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{a-1}{b-1} \cdot \frac{(b-1)^2}{(b-1)^2}} = \frac{1}{b-1} \sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}, \text{ за } a \neq 0,$$

$b \neq 0$  и  $b \neq 1$ .  $\blacklozenge$

Кога еден корен е запишан во нормален вид, рационалниот множител пред знакот на коренот се нарекува **коэффициент** пред коренот. Притоа, два или повеќе корени запишани во нормален вид се **слични** ако имаат различни коефициенти т.е. имаат ист коренов показател и ист поткоренов израз.

**Задача 1.** Кои од следниве корени се слични?

$$\text{а)} \sqrt{3} \text{ и } \sqrt{12}, \quad \text{б)} \sqrt{\frac{a}{2}} \text{ и } \sqrt{\frac{2}{a}}, \text{ за } a > 0,$$

$$\text{в)} \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{45} \text{ и } \sqrt{216}, \quad \text{г)} \sqrt{2\frac{1}{4}}, \sqrt{60} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{15}}.$$

**Решение.** Прво сите корени ги запишуваме во нормален вид, а потоа проверуваме дали се слични.

**а)**  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ , па  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  се слични бидејќи се разликуваат само во коефициентите пред знакот на коренот т.е. коефициентот на  $\sqrt{3}$  е 1, а коефициентот на  $2\sqrt{3}$  е 2,

- б)**  $\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$  и  $\sqrt{\frac{2}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{a \cdot a}} = \frac{\sqrt{2a}}{a}$  се слични бидејќи  $\frac{\sqrt{2a}}{2}$  има коефициент  $\frac{1}{2}$ , а  $\frac{\sqrt{2a}}{a}$  има коефициент  $\frac{1}{a}$ ,
- в)**  $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ,  $\sqrt{216} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$  и  $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$  не се слични бидејќи  $3\sqrt{5}$  нема ист поткоренов израз со другите два корени,
- г)**  $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 15} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 15} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$  и  $\sqrt{\frac{1}{15}} = \sqrt{\frac{1}{15} \cdot \frac{15}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$  се слични. ♦

### Задачи

1. Извлечи множител пред знакот на коренот:

**а)**  $\sqrt{50}$ , **б)**  $\sqrt[3]{0,024}$ , **в)**  $\sqrt[4]{\frac{2x^5}{y^6}}$ , за  $x, y > 0$ , **г)**  $\sqrt[5]{\frac{64a^8}{81b^{13}}}$ ,  $b \neq 0$ .

2. Внеси го множителот под знакот на коренот:

**а)**  $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}$ , **б)**  $3ab^2 \sqrt{\frac{12}{ab}}$ , за  $a, b > 0$ ,  
**в)**  $\frac{a+1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - a^3}{a+1}}$ , за  $a > 0$ , **г)**  $\frac{2x^2}{3} \sqrt[4]{\frac{27a^2}{4x^2}}$ , за  $x \neq 0$ .

3. Дадените корени запиши ги во нормален вид:

**а)**  $\frac{x-y}{x} \sqrt{\frac{1}{xy-y^2}}$ , за  $x > y > 0$ , **б)**  $\frac{2bc}{3xy} \sqrt{\frac{9x^3y^4}{8bc}}$ , за  $x, y, b, c > 0$ ,  
**в)**  $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2 - 2ab + b^2}}$ , за  $a \neq b$ , **г)**  $\sqrt[5]{\frac{32}{a^3}}$ , за  $a \neq 0$ .

4. Кои од следните корени се слични, за  $a, b > 0$  ?

**а)**  $\sqrt[4]{9a^2b^4}$  и  $\sqrt[6]{27a^3b^6}$ , **б)**  $\sqrt{50ab^2}$  и  $\sqrt{120a^3}$ ,  
**в)**  $\sqrt{\frac{a^4b^3}{3a^2 - 6ab + 3b^2}}$  и  $\frac{a+2b}{3} \sqrt{3a^4b^3}$ , **г)**  $\sqrt[3]{\frac{27b}{a^2}}$  и  $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ .

5. Докажи дека се слични корените:

**а)**  $\frac{3}{a} \sqrt{a^3b}$ ,  $\frac{2}{a} \sqrt{ab^5}$  и  $ab \sqrt{\frac{1}{a^3b}}$ , за  $a, b > 0$ ,  
**б)**  $\frac{2}{ab} \sqrt[3]{8a^5 - 16a^3b^2}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{1}{a} - \frac{2b^2}{a^3}}$  и  $3ab \sqrt[3]{\frac{2}{a^3b} - \frac{1}{ab^3}}$ , за  $a, b > 0$ .

## 1.5. Операции со корени

### Собирање и одземање корени

Се собираат, односно одземаат само слични корени. Притоа соодветната операција (собирање или одземање) се врши само со нивните коефициенти.

**Пример 1. а)**  $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5) \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3},$

**б)**  $3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{8a} - 11\sqrt[3]{27a} = 3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{2^3 a} - 11\sqrt[3]{3^3 a} =$   
 $= 3\sqrt[3]{a} + 10\sqrt[3]{a} - 33\sqrt[3]{a} = (3+10-33) \cdot \sqrt[3]{a} = -23 \cdot \sqrt[3]{a}, \text{ за } a > 0,$

**в)**  $2\sqrt{a^3} + \frac{3}{a}\sqrt{a^5} - \frac{3}{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{b} = 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + \sqrt{b} =$   
 $= (2a+3a)\sqrt{a} + (-3+1)\sqrt{b} = 5a\sqrt{a} - 2\sqrt{b}, \text{ за } a, b > 0,$

**г)**  $2a\sqrt[3]{a^4b} - 3a\sqrt[3]{ab^4} - a^2\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} =$   
 $= 2a\sqrt[3]{a^3 \cdot a \cdot b} - 3a\sqrt[3]{a \cdot b^3 \cdot b} - a^2\sqrt[3]{\frac{b^3 \cdot b}{a^2} \cdot \frac{a}{a}} + 2b^3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{b}} =$   
 $= 2a^2\sqrt[3]{ab} - 3ab\sqrt[3]{ab} - ab\sqrt[3]{ab} + 2b^2\sqrt[3]{ab}$   
 $= (2a^2 - 3ab - ab + 2b^2)\sqrt[3]{ab} = (2a^2 - 4ab + 2b^2)\sqrt[3]{ab}$   
 $= 2(a-b)^2\sqrt[3]{ab}, \text{ за } a, b > 0. \blacklozenge$

### Множење и делење корени

Се множат односно делат само корени кои имаат ист коренов показател. Притоа соодветната операција (множење или делење) се извршува со нивните поткоренови изрази и добиениот производ односно количник има ист коренов показател.

**Пример 2. а)**  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10},$

**б)**  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}, \text{ за } a > 0,$

**в)**  $\sqrt[5]{8} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{8^3} : \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{\frac{(2^3)^3}{2^5}} = \sqrt[15]{2^4},$

**г)**  $\sqrt[4]{\frac{2a^3}{b^3}} : \sqrt[6]{\frac{2a}{b}} = \sqrt[12]{\left(\frac{2a^3}{b^3}\right)^3} : \sqrt[12]{\left(\frac{2a}{b}\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{8a^9}{b^9} : \frac{4a^2}{b^2}} =$   
 $= \sqrt[12]{\frac{8a^9}{b^9} \cdot \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt[12]{\frac{2a^7}{b^7} \cdot \frac{b^5}{b^5}} = \frac{1}{b} \sqrt[12]{2a^7b^5}, \text{ за } a, b > 0.$

### Степенување и коренување корен

Следната теорема ги одредува правилата за степенување и коренување корен.

**Теорема.** Ако  $a$  е позитивен реален број, а  $m$  и  $n$  се природни броеви, тогаш важат равенствата:  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  и  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$

Навистина, за  $n$ -от степен на  $(\sqrt[n]{a})^m$  имаме:

$$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^{n \cdot m} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m.$$

Од дефиницијата за корен имаме дека  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ .

Слично, за  $n \cdot m$ -от степен на  $\sqrt[n \cdot m]{a}$  имаме:

$$\left(\sqrt[n \cdot m]{a}\right)^{n \cdot m} = \left(\left(\sqrt[n \cdot m]{a}\right)^n\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = a$$

Од дефиницијата за корен имаме дека  $\sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ . ♦

Равенството  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  го викаме правило за степенување корен, а  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$  правило за коренување корен.

### Пример 3.

**а)**  $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2},$

**б)**  $(\sqrt{a^3 b})^3 = \sqrt{a^9 b^3} = a^4 b \sqrt{ab},$  за  $a, b > 0,$

**в)**  $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5},$

**г)**  $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[4]{8},$

**д)**  $\sqrt[3]{5x\sqrt{xy}} = \sqrt[3]{5x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{xy}} = \sqrt[6]{25x^2} \cdot \sqrt[6]{xy} = \sqrt[6]{25x^3 y},$  за  $x, y > 0.$  ♦

**Задача 1.** Изврши ги назначените операции:

**а)**  $16\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{4}\sqrt[3]{4x},$  за  $x > 0,$

**б)**  $\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \cdot \sqrt{2a},$  за  $a > 0$

**в)**  $\left(\sqrt[4]{8a^6 b^9} - ab\sqrt[6]{8a^4 b^5} + ab^2\sqrt[4]{2a^4 b}\right) : \sqrt[4]{2ab},$  за  $a, b > 0$

**г)**  $\sqrt{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}} : \sqrt[3]{a\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}},$  за  $a > 0.$

**Решение. а)**  $16\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{4}\sqrt[3]{4x} = 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt[6]{(2x)^3} \cdot \sqrt[6]{(4x)^2} = 4\sqrt[6]{2^3 \cdot x^3 \cdot 2^4 \cdot x^2} =$   
 $= 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{2x^5} = 8\sqrt[6]{2x^5},$

**б)**  $\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \cdot \sqrt{2a} =$   
 $= a\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2a} + \sqrt{2a \cdot 2a} + 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2a} - \sqrt{\frac{2}{a} \cdot 2a} =$   
 $= a\sqrt{a} + 2a + 2a - 2 = a\sqrt{a} + 4a - 2,$

**в)**  $\left(\sqrt[4]{8a^6 b^9} - ab\sqrt[6]{8a^4 b^5} + ab^2\sqrt[4]{2a^4 b}\right) : \sqrt[4]{2ab} =$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[4]{\frac{8a^6b^9}{2ab}} - ab^{12}\sqrt[12]{\frac{(8a^4b^5)^2}{(2ab)^3}} + ab^2\sqrt[4]{\frac{2a^4b}{2ab}} = \\
&= \sqrt[4]{4a^4b^8} - ab^{12}\sqrt[12]{8a^5b^7} + ab^2\sqrt[4]{a^3} = ab^2\sqrt{2} - ab^{12}\sqrt[12]{8a^5b^7} + ab^2\sqrt[4]{a^3}, \\
\text{г)} \quad &\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4} : \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}\right) : \left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right) = \\
&= \left(\sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^4}\right) : \left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right) = \sqrt[18]{\frac{(a^2)^3 \cdot (a^4)^3}{a^6 \cdot a^3 \cdot (a^2)^2}} = \sqrt[18]{a^5} \cdot \blacklozenge
\end{aligned}$$

**Задачи****1. Пресметај:**

а)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ ,      б)  $(1 - \sqrt{a})^2$ , за  $a > 0$ ,      в)  $(1 - 2\sqrt{3})^2$ ,

г)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ ,      д)  $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}}$ , за  $a > 0$ .

**2. Пресметај:**

а)  $3a\sqrt[4]{a^3} \cdot 2a^2\sqrt[4]{a}$ , за  $a > 0$ ,

б)  $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3bc^2}$ , за  $a, b, c > 0$ ,

в)  $6a\sqrt[4]{a^2 - b^2} : (-3a\sqrt[4]{a+b})$ , за  $a > 0, |b| < a$

г)  $\sqrt[3]{a^2b^5c^4} : \sqrt{ab^2c^2}$ , за  $a, b, c > 0$ .

**3. Пресметај:**

а)  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - \sqrt{128} + \sqrt{32}$ ,

б)  $a\sqrt{\frac{1}{a}} + 2\sqrt{a} - 5\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + (a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$ , за  $a > 1$ ,

в)  $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2} : (\sqrt[4]{a^7} \cdot \sqrt[12]{a^{11}})$ , за  $a > 0$ ,

**4. Изврши ги назначените операции:**

а)  $\sqrt[3]{\frac{12}{25}\sqrt{\frac{244}{15(38^2-23^2)}}}$ ,      б)  $\sqrt{a^6\sqrt{a^5}} + \sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}} - 2\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}$ ,

в)  $(\sqrt[4]{a^3\sqrt[6]{a^5}} \cdot \sqrt{a^3\sqrt[2]{a^4}}) : (\sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^5}} \cdot \sqrt{a^{12}\sqrt[7]{a^7}})$ , за  $a > 0$ ,

г)  $\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})} \cdot \sqrt{2\sqrt{x} - \sqrt{3x}}$ , за  $x > 0$ .

**5. Упрости го изразот:**

а)  $\frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{24} + 3 + \sqrt{16} + \sqrt{6})}{\sqrt{12} + 2\sqrt{2}}$ ,      б)  $\frac{(\sqrt{7} - \sqrt{15})(7\sqrt{2} + \sqrt{210} + \sqrt{35} + 5\sqrt{3})}{\sqrt{14} + \sqrt{5}}$ .

## 1.6. Рационализација на именител на дробка

Во практиката често се среќаваат изрази кои во именителот содржат барем еден корен. Постапката со која таквите изрази ги запишуваме со изрази кои се идентични со нив и притоа не содржат корен во именителот се нарекува **рационализација на именителот на дробка**.

За да ја реализираме таа постапка треба именителот на дробката да го прошириме со таков израз така што новиот израз, во именителот, нема да содржи корен.

Ако дробката има именител  $\sqrt[n]{A^m}$ , каде  $m < n$ , тогаш ја прошируваме со  $\sqrt[n]{A^{n-m}}$ , бидејќи производот  $\sqrt[n]{A^m} \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}} = A$  не содржи корен.

**Пример 1. а)**  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  ќе ја рационализираме ако дробката ја прошириме со

$$\sqrt{2^{2-1}} = \sqrt{2}, \text{ па имаме: } \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

**б)**  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$  ќе ја прошириме со  $\sqrt[3]{5^{3-1}} = \sqrt[3]{5^2}$  и имаме:  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5},$

**в)**  $\frac{3}{\sqrt[5]{a^{11}}}$  прво ќе извлечеме множител пред знакот на коренот т.е.  $\frac{3}{a^2 \sqrt[5]{a}}$ , а потоа

ќе ја прошириме дробката со  $\sqrt[5]{a^4}$ , па имаме:  $\frac{3}{a^2 \sqrt[5]{a}} = \frac{3}{a^2 \sqrt[5]{a}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^4}} = \frac{3\sqrt[5]{a^4}}{a^3}, \text{ за } a > 0. \blacklozenge$

Ако дробката има именител од видот  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ,  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ ,  $A + \sqrt{B}$  или  $A - \sqrt{B}$ , тогаш ја прошируваме со  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ ,  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ,  $A - \sqrt{B}$  или  $A + \sqrt{B}$ , соодветно, за да ја искористиме формулата  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

**Пример 2. а)** Дробката  $\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  ќе ја прошириме со  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ , па имаме:

$$\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}. \text{ Во производот во именителот}$$

може да ја искористиме формулата  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , па имаме:

$$\frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3^2} - \sqrt{2^2}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$\text{б) } \frac{2x-4y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} = \frac{2x-4y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}} = \frac{(2x-4y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{\sqrt{x^2}-\sqrt{(2y)^2}} =$$

во именителот се добива израз кој може да се скрати со броителот, па имаме:

$$\frac{2(x-2y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{x-2y} = 2(\sqrt{x}+\sqrt{2y}), \text{ за } x, y > 0 \text{ и } x \neq -2y,$$

**в)** Дробката може да ја рационализираме на следниот начин:

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{(1-x)\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{(1+\sqrt{x})^2}} =$$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{1+\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-x)\sqrt{1+\sqrt{x}}}{1-x} = \sqrt{1+\sqrt{x}}, \text{ за } x > 0, x \neq 1 \text{ или рационализирањето може}$$

да го извршиме поинаку:  $\frac{1-x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} = \frac{(1-x)\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1^2 - \sqrt{x}^2}} =$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{(1-x)\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-x} = \sqrt{1-\sqrt{x}} \text{ за } x \in (0,1). \blacklozenge$$

Ова значи дека ако во именителот на дробката имаме израз  $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ , тогаш може прво да прошириме со  $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ , а потоа со  $A-\sqrt{B}$ , но може да работиме и на следниот начин: прво да прошириме со  $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ , а потоа со  $\sqrt{A^2-B}$ . Аналогно постапка се изведува и за дробка со именител  $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ .

### Задачи

1. Рационализирај го именителот на дробката:

- а)  $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$ , б)  $\frac{23}{5-\sqrt{2}}$ , в)  $\frac{xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ , за  $x, y > 0$  и  $x \neq y$ ,  
 г)  $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}$ , за  $a > 0$ , д)  $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$ , е)  $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$ , за  $a, b > 0$ ,  
 ж)  $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{ab}}$ , за  $a > b > 0$ .

## 1.7. Степен со показател рационален број

**Дефиниција.** Ако  $a$  е позитивен реален број и  $\frac{m}{n}$  е рационален број, каде  $m$  е цел, а  $n$  природен број, тогаш  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  се вика **степен со показател рационален број**.

Специјално, ако  $m=1$ , тогаш  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

Ако ги имаме предвид операциите со степени, тогаш важат и равенствата:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left( a^{\frac{1}{n}} \right)^m = \left( a^m \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Пример 1.**  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ,  $8^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8^{-3}}$ ,  $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2}$  се примери на неколку степени запишани како корени.  $\blacklozenge$



**Пример 2.**  $\sqrt{100} = 100^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{(8a)^4} = (8a)^{\frac{4}{3}}$ ,  $\sqrt[5]{9x^2} = (3x)^{\frac{2}{5}}$  се примери на неколку корени запишани како степени. ♦

Од степен со показател цел број важи  $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ , па  $a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$

Според тоа, важи следнава:

**Теорема 1.** Ако  $a$  е позитивен реален број и  $\frac{m}{n}$  е рационален број, каде  $m$  е цел, а  $n$  природен број, тогаш  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$

Познато ви е дека записот на рационалниот број со дробката  $\frac{m}{n}$  не е еднозначен. На пример,  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}, \dots$  Од тоа што за секој позитивен број  $a$ , важат равенствата:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n \cdot k} = a^{m \cdot k} \text{ и } \left(a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}}\right)^{n \cdot k} = a^{m \cdot k}, \text{ каде } m \text{ е цел број, а } n \text{ и } k \text{ се природни броеви,}$$

можеме да заклучиме дека позитивните броеви  $a^{\frac{m}{n}}$  и  $a^{\frac{mk}{nk}}$  имаат исти  $nk$ -ти степен. Тоа значи дека кога запишуваме степен со показател рационален број, претставувањето не зависи од тоа која дробка, еднаква на  $\frac{m}{n}$ , ќе ја искористиме.

**Пример 3.**  $9^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3.$  ♦

**Пример 4. а)**  $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ , а за  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  имаме:

$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2$ . Значи, добиваме  $(-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}}$  што не е можно,

**б)**  $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$  нема смисла во множеството реални броеви. ♦

**Забелешка.** Изразот  $a^{\frac{m}{n}}$ , за  $a$  негативен реален број и  $n \neq 1$  не е дефиниран.

**Теорема 2.** За секои позитивни реални броеви  $a$  и  $b$  и за секои  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  рационални броеви, каде  $m$  и  $p$  се цели, а  $n$  и  $q$  се природни броеви, важат следните равенства:

**1)**  $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{n \cdot q}},$

**2)**  $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m-p}{n \cdot q}},$

**3)**  $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}},$

**4)**  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}},$

**5)**  $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}.$

Навистина, од дефиницијата за степен со рационален показател и правилата за операции со корени, добиваме:

- 1)  $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$
- 2)  $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} : a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}},$
- 3)  $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}},$
- 4)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}},$
- 5)  $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}. \blacklozenge$

**Задача 1.** Пресметај:

- а)  $81^{0,25}$ ,      б)  $3^{-2} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$ ,      в)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + (0,027)^{\frac{2}{3}} + \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ,  
 г)  $\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right) : a^{\frac{1}{4}}$ , за  $a, b > 0$ .

**Решение. а)**  $81^{0,25} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$  или  $81^{0,25} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 3^1 = 3$ ,

б)  $3^{-2} \cdot 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^2} \cdot \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3^2} \cdot 3 = \frac{1}{3}$ ,

в)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + (0,027)^{\frac{2}{3}} + \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} + \left(\frac{3}{10}\right)^{3 \cdot \frac{2}{3}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} =$   
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = 2 + \frac{9}{100} + \frac{16}{25} = \frac{273}{100} = 2,73$ ,

г)  $\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right) : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{12}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{12}} \cdot b^{\frac{2}{12}} = (a^5 b^2)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a^5 b^2}. \blacklozenge$

### Задачи

1. Запиши ги како корен следните изрази:

- а)  $x^{\frac{1}{4}}$ ,      б)  $a^{-0,5}$ ,      в)  $(x+1)^{\frac{3}{2}}$ ,      г)  $(x-y)^{-\frac{3}{4}}$ ,      д)  $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ .

2. Дадените корени запиши ги во вид на степени со рационален показател:

- а)  $\sqrt[3]{a}$ ,      б)  $\sqrt[n]{a^2}$ ,      в)  $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$ ,      г)  $\sqrt[m]{x^{-2}}$ ,      д)  $\sqrt[4]{(a-b)^{-n}}$ .

3. Извршете ги назначените операции со степени:

- а)  $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} : x^{-0,25}$ ,      б)  $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$ ,      в)  $9^{-\frac{1}{2}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$ .

4. Пресметај:

- а)  $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})$ ,      б)  $(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{2}{3}}) : x^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{в)} (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2, \quad \text{г)} (a^{\frac{2}{3}} + 1)^3.$$

5. Упрости го изразот:

$$\text{а)} (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}})^{-2}, \quad \text{б)} (16a^{\frac{3}{2}}b^{-2})^{\frac{3}{4}}.$$

## 1.8. Ирационални изрази

Досега се запознавме со следниве шест операции со броеви: собирање, множење, одземање, делење, степенување (со природен и цел показател) и коренување. Сите овие операции се викаат, со заедничко име, **алгебарски операции**, од кои првите пет се викаат уште **рационални алгебарски операции**, а коренувањето - **ирационална алгебарска операција**.

**Дефиниција.** Изразите во кои се застапени конечен број пати само рационални операции, се викаат **рационални изрази**, а изразите во кои покрај рационалните операции е застапена и операцијата коренување, се викаат **ирационални изрази**.

Со заедничко име рационалните и ирационалните изрази ги викаме **алгебарски изрази**.

**Пример 1.** Рационални изрази се:  $2ab - 3a^2$ ,  $5x^4y^{-2} + 3$ ,  $\frac{x^2y - 3}{x^2 + 1}$ , а ирационални изрази се изразите:  $2 + \sqrt{3}$ ,  $5x - \sqrt[3]{xy^2}$ . ♦

Ирационалните изрази, исто како и рационалните, можат да содржат променливи, или да не содржат променливи. Дефиниционата област  $D$  на секој ирационален израз, т.е. множеството вредности на променливата (променливите) за кои дадениот ирационален израз има смисла, ќе ја одредуваме од условите: поткореновиот израз на корените со парен коренов показател да се ненегативни и именителите на изразите да се различни од нула.

**Пример 2.** Дефиниционата област на ирационалниот израз  $\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x+5}+3}{x-4}$  ја одредуваме од условите:  $x + 5 \geq 0$ ,  $x \neq 0$  и  $x - 4 \neq 0$ , односно:  $x \geq -5$ ,  $x \neq 0$  и  $x \neq 4$ . Значи, имаме:  $D = [-5, \infty) \setminus \{0, 4\}$ . ♦

Во сите задачи во кои треба да ги извршиме операциите и да ги упростиме изразите, освен ако не е поинаку нагласено, ќе сметаме дека веќе е одредена дефиниционата област на променливата (променливите).

**Задача 1.** Изврши ги назначените операции и упрости го изразот:

$$\begin{aligned} \text{а)} & -2y\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} : 3x\sqrt{\frac{y}{x}}, \\ \text{б)} & \frac{\sqrt{a^3} + a\sqrt{18} + 6\sqrt{a} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{a^3} + a\sqrt{2} + 2\sqrt{a} + \sqrt{8}} - 1, \text{ за } a = 2 \\ \text{в)} & \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y), \end{aligned}$$

$$\text{г)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1 \right).$$

**Решение. а)** Прво ги сведуваме дадените корени на ист коренов показател, а потоа пресметуваме количник, па имаме:

$$\begin{aligned} -2y\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} : 3x\sqrt{\frac{y}{x}} &= -2y\sqrt[6]{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2} : 3x\sqrt[6]{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{-2y}{3x}\sqrt[6]{\frac{x^2}{y^3}} = \\ &= \frac{-2y}{3x}\sqrt[6]{\frac{x^5}{y^7} \cdot \frac{y^5}{y^5}} = \frac{-2y}{3xy^2}\sqrt[6]{(xy)^5} = \frac{-2}{3xy}\sqrt[6]{(xy)^5}, \end{aligned}$$

**б)** Дадените изрази ги сведуваме на заеднички именител, потоа ги упростуваме и на крај ја заменуваме дадената вредност за  $a$ , па имаме:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^3} + a\sqrt{18} + 6\sqrt{a} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{a^3} + a\sqrt{2} + 2\sqrt{a} + \sqrt{8}} - 1 &= \frac{\cancel{a\sqrt{a}} + 3a\sqrt{2} + 6\sqrt{a} + 2\sqrt{2} - \cancel{a\sqrt{a}} - a\sqrt{2} - 2\sqrt{a} - 2\sqrt{2}}{a\sqrt{a} + a\sqrt{2} + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2a\sqrt{2} + 4\sqrt{a}}{(a+2)\sqrt{a} + (a+2)\sqrt{2}} = \frac{2(a\sqrt{2} + 2\sqrt{a})}{(a+2)(\sqrt{a} + \sqrt{2})} = \frac{2(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = 1, \end{aligned}$$

**в)** Прво ги рационализираме именителите на дробките, а потоа ги упростуваме добиените изрази и имаме:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x-y) &= \\ = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x-y) &= \\ = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x^2 - x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} - y^2}{x-y} - \frac{\sqrt{xy} \cdot (x-y)}{x-y} \right) : (x-y) &= \\ = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x^2 - y^2 - x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} - x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}{x-y} \right) : (x-y) &= \\ = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \left( \frac{x^2 - y^2}{x-y} - \frac{2(x-y)\sqrt{xy}}{x-y} \right) : (x-y) &= \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + (x+y-2\sqrt{xy}) : (x-y) = \\ = \frac{\cancel{2\sqrt{xy}} - 2y}{x-y} + \frac{x+y-\cancel{2\sqrt{xy}}}{x-y} &= \frac{x-y}{x-y} = 1, \end{aligned}$$

**г)** Прво изразите ги сведуваме на заеднички именител, а потоа ги упростуваме:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1 \right) &= \\ = \left( \frac{1}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \right) &= \\ = \left( \frac{1}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}} \right) : \left( \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \right) &= \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{1 - \sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} = \sqrt{1+a} \cdot \blacklozenge$$

Во задачите од овој вид треба да се применат операциите со корени, коректно да се изврши редот на операции и на крај корените, ако ги има, да се запишат во нормален вид.

### Задачи

1. Одреди ја дефиниционата област на изразите:

а)  $\frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x+2}}{x-3}$ , б)  $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x}}{x+2}$ , в)  $\frac{\sqrt{2x-1} + x}{\sqrt{x+3}}$ , г)  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ .

2. Изврши ги назначените операции и упрости го изразот:

а)  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ , б)  $\left( \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) \cdot (\sqrt{6}+11)$ .

3. Изврши ги назначените операции и упрости го изразот:

а)  $\frac{a^2-4}{a-2\sqrt{2a}+2} : \frac{a+\sqrt{8a}+2}{12}$ , за  $a=26$ ,  
 б)  $\left( \frac{4m(\sqrt[3]{m}+\sqrt{2})}{m^2-8} \right) : \left( \frac{1}{(\sqrt[3]{m}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{m^4}+2\sqrt[3]{m^2}+4)} \right)$ , за  $m=7$

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Пресметај:

а)  $\sqrt{65^2-63^2}$ , б)  $\sqrt[7]{128}$ , в)  $\sqrt[4]{0,0081}$ , г)  $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{135}$ .

2. Кои од следните корени имаат смисла во множеството реални броеви?

а)  $\sqrt[4]{-625}$ , б)  $\sqrt[8]{\frac{3^4}{(-9)^3}}$ , в)  $\sqrt[3]{7-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}$ , г)  $\sqrt[5]{-3,25}$ ,

3. За кои вредности на променливата  $x$ , коренот има смисла?

а)  $\sqrt[5]{x+5}$ , б)  $\sqrt[4]{12-4x}$ , в)  $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$ , г)  $\sqrt[4]{(2x-4)(x+6)}$

4. Упрости:

а)  $\sqrt[6]{(-6)^6}$ , б)  $\sqrt{\frac{100}{(-2)^3}}$ , в)  $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{27}\right)^3}$ , г)  $\sqrt[4]{16x^4}$ , за  $x \leq 0$ .

5. Дадените корени прошири ги со 5:

а)  $\sqrt[3]{3^2}$ , б)  $\sqrt[5]{a^4b}$ , за  $a, b > 0$ , в)  $\sqrt[4]{(-3x)^6 y^2}$ , за  $x, y > 0$ .

6. Скрати ги корените:

а)  $\sqrt[16]{64}$ , б)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}$ , в)  $\sqrt[4]{(-6x^{12})^{10} y^{12}}$ , за  $x, y > 0$ .

7. Дадените корени прошири ги соодветно до најмалиот заеднички содржател на нивните коренови показатели:

а)  $\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}$  и  $\sqrt[4]{2}$ , б)  $\sqrt[3]{\frac{a^2b^4}{5}}, \sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{4}}$  и  $\sqrt[6]{\frac{2a^2b}{5}}$ , за  $a, b > 0$

8. Дадените корени скрати ги со најголемиот заеднички делител на нивните коренови показатели:

а)  $\sqrt[4]{81a^6}, \sqrt[6]{64a^{18}b^6}$  и  $\sqrt[12]{25a^{10}}$ , за  $a, b > 0$ ,

б)  $\sqrt{9a^4b^8}, \sqrt[4]{81a^6b^{12}}$  и  $\sqrt[6]{25a^{10}b^2}$ , за  $a, b > 0$ .

9. Пресметај:

а)  $\sqrt[3]{-64 \cdot x^3}$ , б)  $\sqrt{\frac{0,09}{289}}$ , в)  $\sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{b^{20}c^{10}}}$ , за  $b, c \neq 0$ ,

г)  $\sqrt{a^4b^2} \cdot \sqrt{a^8b^6c^{14}}$ , за  $a, b, c > 0$ , д)  $\sqrt[3]{27a^3} \cdot \sqrt[3]{64a^2} \cdot \sqrt[3]{25a} \cdot \sqrt[3]{5a^6}$ ,

ѓ)  $\sqrt[4]{8x^5y^2} : \sqrt[6]{4xy^2}$ , за  $x, y > 0$ , е)  $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{x(x^2+3)^2}}$ , за  $x > 0$ .

10. Одреди за која вредност на променливата  $x$  важат равенствата:

а)  $\sqrt{(3x+2)^2} = 3x+2$ , б)  $\sqrt{4x^2(x+1)^2} = 2x \cdot (x+1)$ ,

в)  $\sqrt[4]{\frac{1}{(2x+3)^4}} = \frac{1}{|2x+3|}$ , г)  $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+5}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+5}}$ .

11. Извлечи множител пред знакот на коренот:

а)  $\sqrt{90}$ , б)  $\sqrt[3]{0,054}$ , в)  $\sqrt[4]{\frac{8x^9}{y^8}}$ , за  $x, y > 0$ , г)  $\sqrt[5]{\frac{243a^9}{64b^{12}}}$ ,  $b \neq 0$ .

12. Внеси го множителот под знакот на коренот:

а)  $5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5} + \frac{2}{7}}$ , б)  $\frac{a+3}{a^2} \sqrt{\frac{a^5 - a^4}{a+3}}$ , за  $a > 0$ , в)  $\frac{2x^2}{3} \sqrt[4]{\frac{27a^2}{4x^2}}$ , за  $x \neq 0$ .

13. Дадените корени запиши ги во нормален вид:

а)  $\frac{6a^2b}{5c^3} \sqrt[3]{\frac{5c^{10}}{6a^7b^4}}$ , за  $a, b, c > 0$ , б)  $\frac{2ay}{3xb} \sqrt[4]{\frac{9x^3b^4}{8a^2y^3}}$ , за  $x, y, a, b > 0$ ,

14. Пресметај:

а)  $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$ , б)  $(a - \sqrt{a^3})^2$ , за  $a > 0$ , в)  $\sqrt[8]{a^6 \sqrt[5]{a^7 \sqrt{a}}}$ , за  $a > 0$ .

г)  $4a^2 \sqrt[7]{a^3} \cdot 2a^5 \sqrt[7]{a}$ , за  $a > 0$ , д)  $27a^2 \sqrt[6]{a^2 - b^2} : (-9a \sqrt[6]{a+b})$ , за  $a > 0, |b| < a$

ѓ)  $\sqrt[5]{a^2b^5c^4} : \sqrt{ab^2c^2}$ , за  $a, b, c > 0$ .

15. Изврши ги назначените операции:

а)  $\sqrt[3]{\frac{23}{64}} + \sqrt{\frac{5}{48^2 - 32^2}}$ , б)  $(\sqrt[6]{a^3 \sqrt[4]{a^5}} \cdot \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a}}) : (\sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a^5}} \cdot \sqrt{a^{12} \sqrt[5]{a^5}})$ , за  $a > 0$ ,

в)  $\sqrt{a^3 \sqrt[4]{a^3}} \cdot \sqrt{a^3 \sqrt[3]{a \sqrt{a}}}$ , за  $a > 0$ .

16. Рационализирај го именителот на дробката:

а)  $\frac{6}{\sqrt[4]{18}}$ , б)  $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{\sqrt{10} + \sqrt{3}}$ , в)  $\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ , за  $x, y > 0$  и  $x \neq y$ ,

$$\text{г)} \frac{a^2 + 1 + a\sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}}, \quad \text{д)} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x - 1}, \text{ за } x \in [-1, 1].$$

17. Извршете ги назначените операции:

$$\text{а)} \left( \frac{8a^{-3}}{27b^9} \right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\text{б)} \left( 3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} \right) : \left( \left( 2 - 15^{\frac{1}{4}} \right) \cdot \left( 2 + 15^{\frac{1}{4}} \right) \right),$$

$$\text{в)} \left( \left( 5^{\frac{7}{4}} \right)^{\frac{8}{7}} - \frac{(2^{-3})^{-2}}{32} \right) \cdot 46^{-1}$$

18. Одреди ја дефиниционата област на изразите:

$$\text{а)} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x}}{(x-3)(x+1)},$$

$$\text{б)} \frac{\sqrt{3-2x-x}}{\sqrt{x}}.$$

19. Изврши ги назначените операции и упрости го изразот:

$$\text{а)} \frac{3 - \sqrt{5}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2},$$

$$\text{б)} \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \sqrt{1-a^2}, \text{ за } a \in [-1, 1]$$

$$\text{20. Докажи дека } 4a^3 + 2a^2 - 8a + 7 = 10, \text{ ако } a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

## 2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

### 2.1. Мерење на агли

Постојат различни начини за изразување на големината на агли. До сега, како единица мерка за мерење на агли го користевме **степенот**.

Да се потсетиме дека **еден степен** ( $1^\circ$ ) се дефинира како  $1/360$  дел од полниот агол. Помали единици се **една минута** ( $1'$ ) која се дефинира како  $1/60$  дел од еден степен и **една секунда** ( $1''$ ) која се дефинира како  $1/60$  дел од една минута, односно  $1/3600$  дел од еден степен.

Користејќи ги односите

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \quad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ, \quad 1^\circ = 60' \quad \text{и} \quad 1' = 60''$$

може да претвораме големина на агол дадена во степени, минути и секунди во децимален облик на степени, и обратно.

**Пример 1.** Претвори го аголот од  $14^\circ 36' 54''$  во децимален облик.

$$14^\circ 36' 54'' = 14^\circ + \left(\frac{36}{60}\right)^\circ + \left(\frac{54}{3600}\right)^\circ = 14^\circ + 0,6^\circ + 0,015^\circ = 14,615^\circ. \blacklozenge$$

**Пример 2.** Претвори го аголот  $72,568^\circ$  во степени, минути и секунди.

$$\begin{aligned} 72,568^\circ &= 72^\circ + (0,568 \cdot 60)' = 72^\circ + 33,9' = 72^\circ + 34' + (0,9 \cdot 60)'' = \\ &= 72^\circ + 34' + 54'' = 72^\circ 34' 54''. \blacklozenge \end{aligned}$$

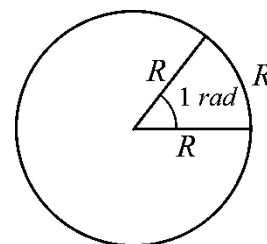
Во дадена кружница лаци над еднакви централни агли имаат еднакви должини, и обратно, централни агли над лаци со еднакви должини се еднакви. Според тоа, доаѓаме до идеја агли да се мерат и со друга единица која би одговарала на мерна единица за должина.

**Дефиниција.** Големината на централен агол во кружница чиј соодветен лак има должина еднаква на должината на радиусот на таа кружница, се нарекува **еден радијан** и се означува со **1 rad** (цртеж 1).

Да ја утврдиме врска меѓу двете единици мерки за мерење на агли, степени и радијани. Бидејќи должината на кружница со радиус  $R$  е  $2R\pi$ , следува дека полниот агол, кој е централен агол на целата кружница, има големина  $2\pi \text{ rad}$ . Од друга страна, полниот агол има големина  $360^\circ$ . Според тоа, имаме дека

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

од каде што добиваме дека



Цртеж 1



$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$$

односно

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}$$

Така ги добиваме следните правила за претворање на една мерна единица во друга.

- Помножи ги степените со  $\frac{\pi}{180}$ , за да претвориш во радијани.
- Помножи ги радијаните со  $\frac{180^\circ}{\pi}$ , за да претвориш во степени.

**Задача 1.** Изрази ги во радијани аглиите дадени во степени:

- а)**  $30^\circ$ ,      **б)**  $50^\circ$ ,      **в)**  $72^\circ 35'$ ,      **г)**  $100^\circ 11' 15''$ .

**Решение.** Имаме дека

**а)**  $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52 \text{ rad}$ ,      **б)**  $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \approx 0,9 \text{ rad}$ ,

**в)**  $72^\circ 35' = 72 \cdot \frac{\pi}{180} + 35 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,2 \text{ rad}$ ,

**г)**  $100^\circ 11' 15'' = 100 \cdot \frac{\pi}{180} + 11 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} + 15 \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,7 \text{ rad}$ . ♦

**Задача 2.** Изрази ги во степени аглиите, дадени во радијани:

- а)**  $0,2$       **б)**  $\frac{\pi}{3}$ ,      **в)**  $1,35$ ,      **г)**  $\frac{5\pi}{12}$ .

**Решение.** Имаме дека

**а)**  $0,2 = 0,2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 11,5^\circ \approx 11^\circ 30'$ ,      **б)**  $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$ ,

**в)**  $1,35 = 1,35 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 77,4^\circ = 77^\circ 24'$ ,      **г)**  $\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$ . ♦

Во следната табела се дадени големините на неколку често користени агли во степени и радијани.

|          |   |                 |                 |                 |                 |       |                  |        |
|----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|------------------|--------|
| Степени  | 0 | 30              | 45              | 60              | 90              | 180   | 270              | 360    |
| Радијани | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

### Задачи

1. Изрази ги во радијани аглиите:

- а)**  $15^\circ$       **б)**  $45^\circ$       **в)**  $68^\circ$       **г)**  $120^\circ$   
**д)**  $135^\circ 15'$       **е)**  $20^\circ 20'$       **ж)**  $52^\circ 13' 27''$ .

2. Изрази ги во степени аглиите:

- а)**  $\frac{\pi}{18}$       **б)**  $\frac{\pi}{12}$       **в)**  $\frac{\pi}{4}$       **г)**  $\frac{7\pi}{12}$

д) 3                      г) 2,31                      е) 2,7333.

3. Изрази ги во радијани аглите:

а) аглите на рамнокрак правоаголен триаголник

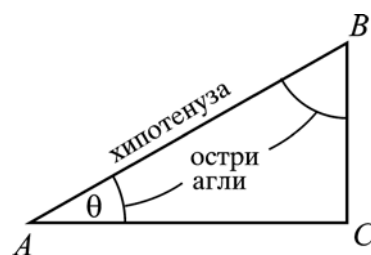
б) аглите на правилен петаголник

в) аглите на правилен десетаголник.

## 2.2. Тригонометриски функции од остар агол

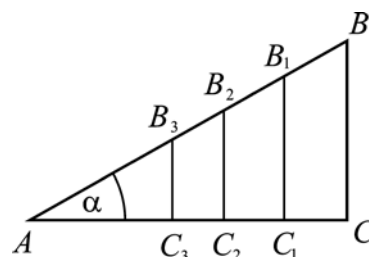
Во оваа лекција ќе дефинираме четири функции, наречени тригонометриски функции од остар агол, со помош на правоаголен триаголник.

Да се потсетиме дека еден агол кој е поголем од  $0^\circ$ , а е помал од  $90^\circ$  се нарекува остар агол. На пример, во триаголникот  $ABC$  аголот при темето  $C$  е прав агол ( $90^\circ$ ), а двата агли при темињата  $A$  и  $B$  се остри агли (цртеж 2). Страната  $\overline{AB}$  спроти правиот агол се нарекува **хипотенуза**. Ако го означиме со  $\theta$  еден од острите агли во триаголникот, тогаш страната  $BC$  се нарекува **спротивна катета**, а страната  $AC$  се нарекува **прилегната катета** за аголот  $\theta$ .



Цртеж 2

Да го разгледаме правоаголниот триаголник  $ABC$  и отсеките  $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$  и  $B_3C_3$ , кои се нормални на катетата  $AC$  (цртеж 3). Тие отсечки се катети на правоаголните триаголници  $AB_1C_1$ ,  $AB_2C_2$  и  $AB_3C_3$ , кои имаат заеднички агол  $\alpha$  со правоаголниот триаголник  $ABC$ .



Цртеж 3

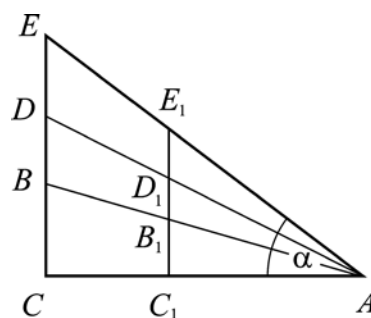
Правоаголните триаголници се слични, а соодветните триаголници се пропорционални, односно важи:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Според тоа, за даден агол  $\alpha$ , односите меѓу должините на соодветните страни на правоаголните триаголници од цртеж 3 се константни.

Но, ако се промени големината на аголот  $\alpha$  тогаш ќе се промени и вредноста на односите. За да дојдеме до овој заклучок, доволно е да ги разгледаме правоаголните триаголници  $AB_1C_1$ ,  $AD_1C_1$  и  $AE_1C_1$  (цртеж 4). Овие триаголници не се слични, па затоа односите на



Цртеж 4

соодветните страни не се еднакви, на пример,  $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} \neq \frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{AC_1}}$ .

Значи, промената на аголот  $\alpha$  влијае на промената на вредноста на односот на должината на соодветните страни. Така може да заклучиме дека односот од должините на две страни во правоаголен триаголник зависи од големината на остриот агол на тој триаголник. Затоа тие односи добиле посебни имиња:

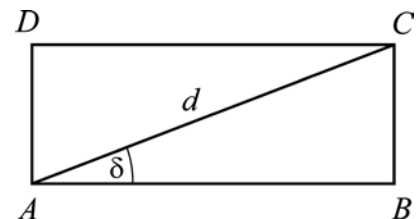
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$  се вика **синус** од аголот  $\alpha$  и се означува со  $\sin \alpha$ , односно  $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$   
 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$  се вика **косинус** од аголот  $\alpha$  и се означува со  $\cos \alpha$ , односно  $\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$   
 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  се вика **тангенс** од аголот  $\alpha$  и се означува со  $\tan \alpha$ , односно  $\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$  и  
 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  се вика **котангенс** од аголот  $\alpha$  и се означува со  $\cot \alpha$ , односно  $\cot \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ .

Претходно дефинираните функции кои ја даваат зависноста меѓу должините на страните во правоаголен триаголник и неговите остри агли се викаат **тригонометриски функции**. Нив може да ги искажеме и на следниот начин:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{должината на спротивната катета за } \alpha}{\text{должината на хипотенузата}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{должината на налегнатата катета за } \alpha}{\text{должината на хипотенузата}} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{должината на спротивната катета за } \alpha}{\text{должината на налегнатата катета за } \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{должината на налегнатата катета за } \alpha}{\text{должината на спротивната катета за } \alpha}\end{aligned}$$

**Пример 1.** За тригонометриските функции од остриот агол  $\delta$  во правоаголникот ABCD на цртеж 5 имаме

$$\sin \delta = \frac{b}{d}, \quad \cos \delta = \frac{a}{d}, \quad \tan \delta = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \cot \delta = \frac{a}{b}. \blacklozenge$$



Цртеж 5

**Задача 2.** Даден е правоаголен триаголник чии катети се 3 cm и 4 cm. Одреди ги тригонометриските функции (цртеж 6).

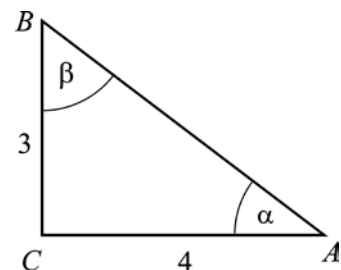
**Решение.** Според Питагоровата теорема може да ја пресметаме должината на хипотенузата. Имаме дека

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c^2 = 3^2 + 4^2, \quad c^2 = 25, \quad c = 5.$$

За аголот  $\alpha$  наоѓаме дека

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}.$$

За аголот  $\beta$  наоѓаме дека



Цртеж 6

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}. \quad \blacklozenge$$

Тригонометриските функции синус и косинус се дефинирани и за нултиот и правиот агол со:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{и} \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Исто така се дефинира

$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0,$$

додека  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$  и  $\operatorname{ctg} 0$  не се дефинирани.

### Задачи

1. Одреди ги тригонометриските функции од аголот  $\beta$  во правоаголен триаголник ако се дадени двете катети  $a$  и  $b$

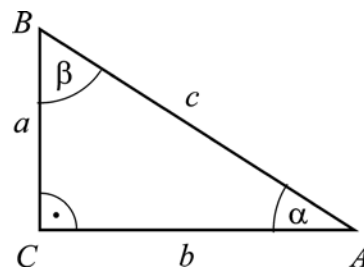
а)  $a = 5, \quad b = 12$       б)  $a = 3, \quad b = 5, 2.$

2. Одреди ги тригонометриските функции од аголот  $\alpha$  во правоаголен триаголник ако се дадени катеата  $a$  и хипотенузата  $c$

а)  $a = 8, \quad c = 10$       б)  $a = 9, 8, \quad c = 12, 6$

### 2.3. Тригонометриски функции од комплементни агли

Два агли се нарекуваат комплементни ако нивниот збир е прав агол. На пример, двата агли во правоаголен триаголник се комплементни агли. Ако  $\alpha$  е еден од остриите агли во правоаголен триаголник  $ABC$  (цртеж 7), тогаш аголот  $\beta = 90^\circ - \alpha$  е неговиот комплементен агол. Ако  $\alpha$  е даден во радијани, тогаш  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  е неговиот комплементен агол. Комплементен агол на агол од  $0^\circ$  е агол од  $90^\circ$ , додека комплементен агол на агол од  $90^\circ$  агол од  $0^\circ$ .



Цртеж 7

**Задача 1.** Најди го комплементниот агол на аголот  $\alpha$  ако:

а)  $\alpha = 37^\circ$       б)  $\alpha = \frac{\pi}{5}.$

**Решение.** Имаме дека

а)  $90^\circ - \alpha = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$       б)  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}. \quad \blacklozenge$

На цртеж 7, двата остри агли  $\alpha$  и  $\beta$  во правоаголниот триаголник  $ABC$  се комплементни. Страната  $a$  е спротивна катета за аголот  $\alpha$ , а налегната за аголот  $\beta$ ,

додека страната  $b$  е налегната катета за аголот  $\alpha$ , а спротивна за аголот  $\beta$ . Според тоа, за тригонометриските функции од агли  $\alpha$  и  $\beta$  (при услов  $\alpha \neq 0^\circ$  и  $\beta \neq 0^\circ$ ), имаме дека

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.$$

од каде што добиваме дека

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

**Забелешка.** За комплементните агли  $0^\circ$  и  $90^\circ$  точно е дека

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ \text{ и } \cos 0^\circ = \sin 90^\circ, \text{ но } \operatorname{tg} 0^\circ \neq \operatorname{ctg} 90^\circ \text{ и } \operatorname{ctg} 0^\circ \neq \operatorname{tg} 90^\circ.$$

**Пример 2.** Со непосредна пресметка добиваме дека

$$\cos 70^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \sin 20^\circ, \quad \sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 80^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}. \blacklozenge$$

**Задача 3.** Упрости го изразот:

$$\text{а) } \sin 40^\circ + 4 \cos 50^\circ \quad \text{б) } \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{ctg} 70^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$$

**Решение.** Со примена на формулите за наоѓање на тригонометриски функции од комплементни агли наоѓаме дека

$$\text{а) } \sin 40^\circ + 4 \cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) + 4 \cos 50^\circ = \\ = \cos 50^\circ + 4 \cos 50^\circ = 5 \cos 50^\circ$$

$$\text{б) } \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{ctg} 70^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ} = \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{tg}(90^\circ - 70^\circ)}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}(90^\circ - 70^\circ)} = \\ = \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \operatorname{tg} 20^\circ}{5 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7 \operatorname{tg} 20^\circ}{4 \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7}{4}. \blacklozenge$$

**Задача 4.** Пресметај го аголот  $\alpha$ , ако  $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 20^\circ$ .

**Решение.** Со примена на формулите за наоѓање на тригонометриски функции од комплементни агли наоѓаме дека

$$\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin[90^\circ - (\alpha + 10^\circ)] = \sin 20^\circ$$

од каде што следува дека  $90^\circ - (\alpha + 10^\circ) = 20^\circ$ .

Со непосредна пресметка се добива дека  $\alpha = 60^\circ$ .  $\blacklozenge$

### Задачи

1. Пресметај ги вредностите на следниве тригонометриски функции:

$$\text{а) } \cos 57^\circ \text{ преку } \sin 33^\circ \quad \text{б) } \sin 77.77^\circ \text{ преку } \cos 12.23^\circ$$

$$\text{в)} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{18} \text{ преку } \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} \quad \text{г)} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 1,0785 \right) \text{ преку } \operatorname{ctg} 1,0785.$$

2. Пресметај го аголот  $\alpha$ , ако се знае дека:

$$\text{а)} \cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 30^\circ \quad \text{б)} \operatorname{tg} 35^\circ = \operatorname{ctg}(\alpha - 15^\circ).$$

3. Пресметај го аголот  $\alpha$ , ако се знае дека:

$$\text{а)} \sin(\alpha + 30^\circ) = \cos(\alpha + 30^\circ) \quad \text{б)} \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha - 10^\circ).$$

4. Упрости ги изразите:

$$\text{а)} \frac{3\sin 35^\circ + 5\cos 55^\circ}{2\sin 35^\circ} \quad \text{б)} \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\sin^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ}$$

$$\text{в)} \frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} 62^\circ}{\operatorname{tg} 28^\circ}.$$

5. Ако  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , упрости ги изразите:

$$\text{а)} \sin \alpha + \cos \beta \quad \text{б)} \sin \alpha - \cos \beta \quad \text{в)} \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

6. Ако  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , ( $\alpha \neq 0^\circ$  и  $\beta \neq 0^\circ$ ), пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а)} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \quad \text{б)} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta} \quad \text{в)} \frac{k - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{k + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta} \quad \text{г)} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \beta + \cos \beta}.$$

## 2.4. Вредности на тригонометриските функции на некои агли

При решавањето на разни проблеми во геометријата се користат тригонометриски функции од аглите  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . За пресметување на тригонометриските функции од овие агли ќе ги користиме својствата на тригонометриските функции од комплементни агли.

Да го разгледаме рамностраниот триаголник  $ABC$  со страна  $2 \text{ cm}$  (цртеж 8). Од геометрија е познато дека висината  $AD$  спуштена од темето  $A$  претставува во исто време симетрала на аголот при темето  $A$ , како и симетрала на спротивната страна  $BC$ . Според тоа, имаме дека

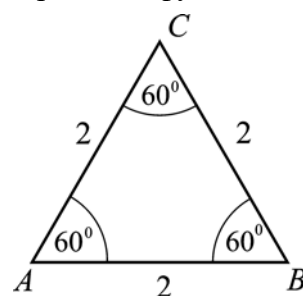
$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{и} \quad \angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Со примена на Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник  $ABD$  на цртеж 9, добиваме дека

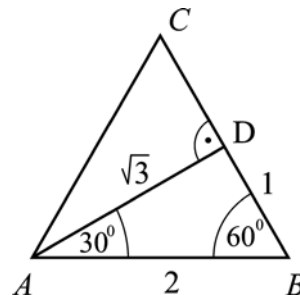
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

од каде што следува дека  $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ , односно  $\overline{AD} = \sqrt{3}$

Сега можеме да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции за аглите во триаголникот  $ABD$ . Наоѓаме дека



Цртеж 8



Цртеж 9

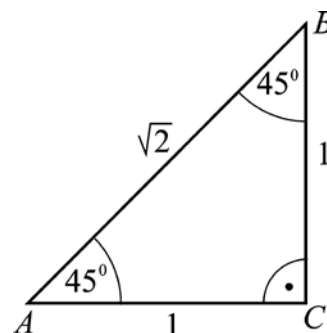
$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}, & \cos 60^\circ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} & \operatorname{ctg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} & \operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

За да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции од агол  $45^\circ$  конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со страна 1 cm (цртеж 10). Неговите остри агли се по  $45^\circ$ . Според Питагоровата теорема хипотенузата  $\overline{AB} = \sqrt{2}$ .

Од дефиницијата на тригонометриските функции следува дека

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$$



Цртеж 10

Добиените вредности за тригонометриските функции може да ги претставиме во табела:

| Степени    | Радијани        | sin                  | cos                  | tg                   | ctg                  |
|------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $0^\circ$  | 0               | 0                    | 1                    | 0                    | /                    |
| $30^\circ$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           |
| $45^\circ$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | 1                    |
| $60^\circ$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^\circ$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1                    | 0                    | /                    | 0                    |

**Задача 1.** Пресметај ја вредноста на изразот

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ.$$

**Решение.** Имаме дека

$$\begin{aligned}\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

**Задача 2.** Провери дали е точно равенството

$$4 \sin^2 60^\circ + 4 \cos^2 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ.$$

**Решение.** Бидејќи  $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$ , добиваме дека

$$\operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ = 2(\sqrt{3})^2 = 6.$$

Од друга страна имаме дека

$$4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 + 1 = 4.$$

Бидејќи вредноста на левата страна е различна од вредноста на десната страна, односно  $4 \neq 6$ , заклучуваме дека

$$4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ \neq \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ. \blacklozenge$$

**Задача 3.** Најди ја вредноста на изразот  $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha}$  за  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.** За вредноста на изразот наоѓаме дека

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos 2 \cdot 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}. \blacklozenge$$

### Задачи

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

б)  $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

в)  $\frac{\sin 30^\circ + 1}{1 + \cos 60^\circ}$

г)  $\frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ}{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}$

2. Пресметај:

а)  $2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

б)  $\sin^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ}$

б)  $\frac{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$

в)  $\frac{4\sin^2 45^\circ + 1}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ}$

## 2.5. Менување на вредноста на тригонометриските функции зависно од аголот

За да видиме како се однесуваат тригонометриските функции од остар агол кога тој ресте од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , ќе ги разгледаме триаголниците на цртеж 11 кои имаат еднакви хипотенузи

$$OB_1 = OB_2 = \dots = OB_n = r.$$

Острите агли меѓу хипотенузата и катетите  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  ги означуваме со  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

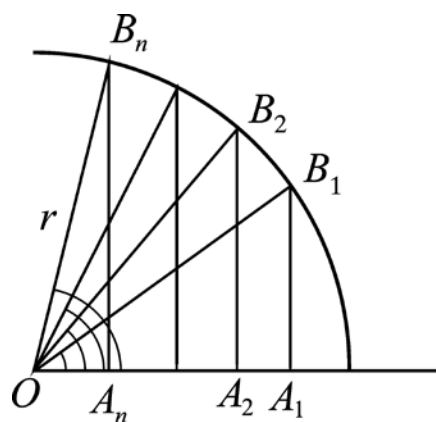
Според конструкцијата наоѓаме дека

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n,$$

$$A_1B_1 < A_2B_2 < \dots < A_nB_n \text{ и}$$

$$OA_1 > OA_2 > \dots > OA_n.$$

Од равенствата



Цртеж 11



$$\sin \alpha_1 = \frac{A_1 B_1}{r}, \sin \alpha_2 = \frac{A_2 B_2}{r}, \dots, \sin \alpha_n = \frac{A_n B_n}{r}$$

заклучуваме дека вредноста на синусот од остар агол расте кога аголот се зголемува. Со други зборови, имаме дека вредноста на функцијата  $\sin \alpha$  расте од 0 до 1 кога вредноста на аргументот  $\alpha$  расте од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

Од равенствата

$$\cos \alpha_1 = \frac{OA_1}{r}, \cos \alpha_2 = \frac{OA_2}{r}, \dots, \cos \alpha_n = \frac{OA_n}{r}$$

заклучуваме дека вредноста на косинусот од остар агол опаѓа кога аголот се зголемува. Со други зборови, имаме дека вредноста на функцијата  $\cos \alpha$  опаѓа 1 до 0 кога вредноста на аргументот  $\alpha$  расте од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

На сличен, од равенствата

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A_1 B_1}{OA_1}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{A_2 B_2}{OA_2}, \dots, \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{A_n B_n}{OA_n}$$

заклучуваме дека вредноста на тангенсот од остар агол расте кога аголот се зголемува, затоа што тогаш броителите растат, а именителите опаѓаат. Значи, вредноста на функцијата  $\operatorname{tg} \alpha$  расте почнувајќи од 0 и е ненегативен реален број, кога вредноста на аргументот  $\alpha$  расте почнувајќи од  $0^\circ$  и е помала од  $90^\circ$ .

На сличен начин, заклучуваме дека вредноста на функцијата  $\operatorname{ctg} \alpha$  опаѓа до 0 и е ненегативен реален број, кога вредноста на аргументот  $\alpha$  е поголема од  $0^\circ$  и расте до  $90^\circ$ .

**Забелешка.** За  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  имаме дека  $0 \leq \sin \alpha \leq 1$  и  $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ .

За  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  имаме дека  $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$  и за  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  имаме дека  $\operatorname{ctg} \alpha \geq 0$ .

### Задачи

1. Спореди ги дадените вредности на тригонометриските функции:

- а)  $\sin 35^\circ$  и  $\sin 67^\circ$       б)  $\cos 40^\circ$  и  $\cos 23^\circ$   
 в)  $\operatorname{tg} 36^\circ$  и  $\operatorname{tg} 58^\circ$       г)  $\operatorname{ctg} 73^\circ$  и  $\operatorname{ctg} 39^\circ$

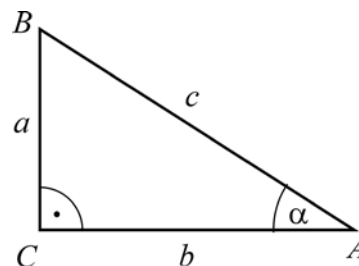
2. Спореди ги дадените вредности на тригонометриските функции:

- а)  $\sin 45^\circ 17' 20''$  и  $\sin 45^\circ 39' 34''$       б)  $\cos 40^\circ 55'$  и  $\cos 40^\circ 12' 12''$   
 в)  $\operatorname{tg} 56^\circ 23' 55''$  и  $\operatorname{tg} 56^\circ 12' 56''$       г)  $\operatorname{ctg} 73^\circ 55' 77''$  и  $\operatorname{ctg} 39^\circ 33' 6''$ .

## 2.6. Врска меѓу тригонометриските функции од ист агол

Познато е дека во правоаголен триаголник  $ABC$  (цртеж 12) важи равенството  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ако ова равенство го поделиме со  $c^2$  добиваме  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$ , односно  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ . Според тоа, имаме дека

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$



Цртеж 12

Бидејќи  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$  и  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ , со замена во последното равенство, добиваме

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad (1)$$

**Пример 1.** На пример, за  $\alpha = 30^\circ$ , имаме дека

$$\sin^2 30 + \cos^2 30 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1. \blacklozenge$$

Со користење на равенството (1) може да ја изразиме функцијата синус од произволен остар агол преку функцијата косинус од тој агол, и обратно, односно

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

**Задача 2.** Пресметај ја вредноста  $\cos \alpha$ , ако  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ .

**Решение.** Имаме дека

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

**Задача 3.** Упрости го изразот  $(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$ .

**Решение.** Со оваа задача ќе покажеме као равенството (1) може да се искористи за упростување на изрази. Имено, имаме дека

$$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \blacklozenge$$

За правоаголниот триаголник  $ABC$  (цртеж 12) имаме дека:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Ако ги поделиме броителот и именителот на десните страни од погорните равенства со  $c$  ( $c \neq 0$ ) добиваме дека

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \quad (2)$$

Ако се помножат  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$  добиваме уште едно равенство

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1} \quad (3)$$

**Пример 4.** Со директно пресметување се добива дека

$$\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = 1. \blacklozenge$$

**Задача 5.** Пресметај ја вредноста  $\operatorname{tg} \alpha$ , ако  $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ .

**Решение.** Од  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2}$  добиваме дека  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}. \blacklozenge$

Со помош на основните врски меѓу тригонометриските функции од остри агли дадени со равенствата (1), (2) и (3), ако е позната вредноста на една од нив, може да се пресметаат вредностите на останатите три функции.

**Задача 6.** Ако  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , колку е  $\cos \alpha$ ?

**Решение.** Имаме дека

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

**Задача 7.** Ако  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , пресметај ги останатите тригонометриски функции од аголот  $\alpha$ .

**Решение.** Од равенството  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$  следува дека  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ , односно  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ . Од друга страна,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , па имаме дека  $(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cos^2 \alpha = 1$ .

Според тоа,  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$ , односно  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Понатаму се пресметува дека

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}. \blacklozenge$$

**Задача 8.** Докажи дека за секој остар агол  $\alpha$  важи

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ & = \sin^2 \alpha + \cancel{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cancel{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \cos^2 \alpha = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

**Задачи**

1. Пресметај ги останатите тригонометриски функции, ако е дадено:

а)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$       б)  $\cos \alpha = 0,25$       в)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$       г)  $\operatorname{ctg} \alpha = 0,41$ .

2. Упрости ги изразите:

а)  $1 - \cos^2 \alpha$       б)  $\sin^2 \alpha - 1$       в)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ .

3. Докажи дека:

а)  $\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$   
 б)  $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2$ .

4. Докажи дека за сите истри агли важи:

а)  $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$       б)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$   
 в)  $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$ .

5. Докажи дека за сите остри агли важи:

$$\text{a)} \frac{1}{1-\cos \alpha} + \frac{1}{1+\cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad \text{б)} \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 2.$$

6. Докажи дека за сите остри агли различни од  $45^\circ$  :

$$\frac{\cos \alpha}{1-\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

7. Изрази ги

а)  $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$  со помош на  $\sin \alpha$

б)  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  со помош на  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

8. Ако  $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ , пресметај ја вредноста на изразот  $\frac{5 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$ .

9. Пресметај ја вредноста на изразот  $4 \operatorname{tg} \alpha - 3 \sin \alpha$  ако  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

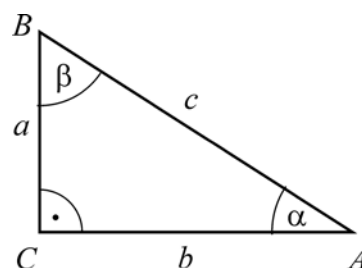
## 2.7. Решавање на правоаголен триаголник

Нека  $a$ ,  $b$  и  $c$  се страни на правоаголен триаголник  $ABC$  (цртеж 13), и нека  $\alpha$  и  $\beta$  се неговите остри агли. Тогаш имаме дека

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ и } a^2 + b^2 = c^2.$$

Освен тоа, од дефиницијата на тригонометриските функции имаме дека

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \sin \alpha, & \frac{b}{c} &= \cos \alpha, & \frac{a}{b} &= \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{a}{c} &= \cos \beta, & \frac{b}{c} &= \sin \beta, & \frac{a}{b} &= \operatorname{ctg} \beta \end{aligned}$$



Цртеж 13

Овие релации ќе ги искористиме за пресметување на основните елементи на правоаголниот триаголник, неговите страни и агли, во случај кога е дадена:

- една страна и еден агол,
- две страни.

Да се реши правоаголен триаголник значи да се пресметаат сите негови основни елементи врз основа на дадените елементи, од кои барем еден е страна.

**Задача 1.** Да се реши правоаголен триаголник со хипотенуза  $c = 93 \text{ cm}$  и агол  $\alpha = 42^\circ 23'$ .

**Решение.** Треба да ги пресметаме двете катети  $a$  и  $b$  и остриот агол  $\beta$ .

Со непосредна пресметака за аголот добиваме

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 42^\circ 23' = 47^\circ 37'.$$

За да ја пресметаме катетата  $a$ , прво пресметуваме  $\sin 42,3833^\circ = 0,67409$ , а потоа од  $a = c \cdot \sin \alpha = 93 \cdot 0,67409 \approx 63$  наоѓаме дека  $a \approx 63 \text{ cm}$ . Катетата  $b$  може да ја пресметаме со помош на хипотенузата и косинусот од аголот  $\alpha$  или со примена на Питагоровата теорема.

I начин.  $b = c \cdot \cos \alpha = 93 \cdot \cos 42,3833^\circ = 93 \cdot 0,73865$ , односно  $b \approx 69 \text{ cm}$ .

II начин.  $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69 \text{ cm}$ . ♦

**Задача 2.** Да се реши правоаголен триаголник чиешто катети се  $a = 21 \text{ cm}$  и  $b = 15 \text{ cm}$ .

**Решение.** Треба да се пресмета хипотенузата и двата остри агли.

Хипотенузата ја пресметуваме со примена на Питагоровата теорема

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25 \text{ cm}.$$

Аголот  $\alpha$  ќе го одредиме со помош на функцијата тангенс. Од условот  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1,4$  пресметуваме дека  $\alpha \approx 54^\circ 28'$ . За аголот  $\beta$  пресметуваме дека  $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ 28'$ , односно  $\beta \approx 35^\circ 32'$ . ♦

**Задача 3.** Да се реши правоаголен триаголник со катета  $b = 53 \text{ cm}$  и агол  $\beta = 64^\circ$ .

**Решение.** Според условите во задачата треба да го пресметаме другиот остар агол, катетата и хипотенузата. Пресметуваме  $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

и  $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = 53 \cdot \operatorname{tg} 26^\circ = 53 \cdot 0,48773 \approx 26$ , односно  $a \approx 26 \text{ cm}$ . Од  $b = c \sin \beta$  наоѓаме дека

$$c = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0,89879}, \text{ односно } c \approx 59 \text{ cm}. \quad \blacklozenge$$

**Задача 4.** Да се реши правоаголен триаголник со катета  $a = 37 \text{ cm}$  и хипотенуза  $c = 48 \text{ cm}$ .

**Решение.** Треба да се пресметаат аглиите  $\alpha$  и  $\beta$  и катета  $b$ .

Од условот  $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0,77083$  имаме дека  $\alpha \approx 50,42878^\circ$ , односно

$$\alpha \approx 50^\circ 25' 44'' \text{ и } \beta = 90^\circ - \alpha \approx 39^\circ 34' 16''.$$

Од  $b = c \cdot \sin \beta = 48 \cdot \sin 39^\circ 34' 16'' \approx 48 \cdot 0,63704 \approx 31$  наоѓаме дека  $b \approx 31 \text{ cm}$ . ♦

### Задачи

Да се реши правоаголен триаголник  $ABC$  ако:

- |                                                     |                                                       |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $\alpha = 36,2^\circ$ , $c = 68 \text{ cm}$ .    | 2. $\beta = 15,8^\circ$ , $c = 12,2 \text{ cm}$ .     |
| 3. $\beta = 65,4^\circ$ , $a = 2,35 \text{ cm}$ .   | 4. $\alpha = 82^\circ$ , $b = 246 \text{ cm}$ .       |
| 5. $\beta = 48^\circ 30'$ , $b = 74,7 \text{ cm}$ . | 6. $\alpha = 24^\circ$ , $a = 5,25 \text{ cm}$ .      |
| 7. $a = 230 \text{ cm}$ , $c = 320 \text{ cm}$ .    | 8. $a = 52,5 \text{ cm}$ , $b = 28 \text{ cm}$ .      |
| 9. $b = 3,9 \text{ cm}$ , $c = 4,5 \text{ cm}$ .    | 10. $\alpha = 30^\circ 50'$ , $b = 53,5 \text{ cm}$ . |

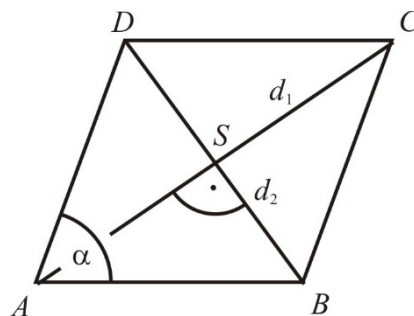
## 2.8. Примена на решавање на правоаголен триаголник

Решавањето на правоаголниот триаголник наоѓа голема примена во решавањето на задачи од областа на планиметријата, но и од секојдневниот живот. Таквата примена ќе ја илустрираме со неколку примери.

**Задача 1.** Пресметај ја страната на ромб ако е даден неговиот остар агол  $\alpha = 66^\circ$  и една дијагонала  $d_1 = 34$  cm.

**Решение.** Нека се дадени аголот  $\alpha$  кај темето  $A$  и дијагоналата  $d_1$  повлечена од тоа теме (цртеж 14). Од правоаголниот триаголник  $ABS$  имаме дека  $\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ , од каде што наоѓаме дека  $17 = a \cdot \cos 33^\circ$ . Со непосредна пресметка добиваме дека

$$a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0,83863} \approx 203 \text{ cm. } \blacklozenge$$



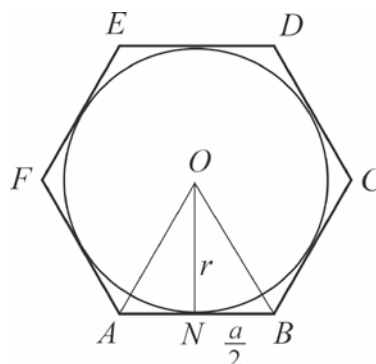
Цртеж 14

**Задача 2.** Пресметај ја страната на правилен шестаголник ако е познат радиусот на впишаната кружница  $r = 12$  cm.

**Решение.** На цртеж 15 е нацртан правилен шестаголник  $ABCDEF$ . Триаголникот  $ABO$  е рамнострани. Аголот  $BON$  е  $30^\circ$ . Од правоаголниот триаголник  $NBO$  следува дека

$$\frac{a}{2} = r \cdot \tan 30^\circ \approx 12 \cdot 0,57735 \approx 6,9282,$$

односно  $a \approx 13,85$  cm.  $\blacklozenge$

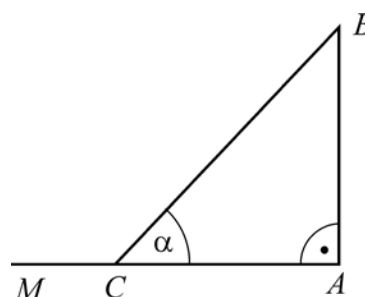


Цртеж 15

**Задача 3.** Пресметај го растојанието меѓу точките  $A$  и  $B$  кои се наоѓаат на различните страни на една река (цртеж. 16).

**Решение.** Во точката  $A$  конструираме прав агол  $BAM$ . На крајот од тој агол земаме точка  $C$  и го мериме аголот  $ACB$ . Нека големината на тој агол е  $\alpha = 49^\circ$ . Го мериме растојанието меѓу точките  $A$  и  $C$  и нека тоа е  $d = 28$  m. Тогаш имаме дека

$$\overline{AB} = d \cdot \tan \alpha = 28 \cdot \tan 49^\circ \approx 28 \cdot 1,15037 \approx 32, \\ \overline{AB} \approx 32 \text{ m. } \blacklozenge$$



Цртеж 16

### Задачи

1. Радиусот на ружницата е 13 cm, должината на тетивата  $AB$  е 10 cm. Пресметај ја големината на аголот  $AOB$ .

2. Висината на рамнокракиот трапез е 6 cm, а основите имаат должини 4 cm и 20 cm, соодветно. Пресметај ги аглите на трапезот.

3. Една железничка пруга на еден дел има нагорнина од 8%. Колкав е нагибниот агол?

4. Над местото А се наоѓа авион на висина од 4000 метри. Во тој момент од него се гледа местото В под агол од  $17^\circ$ . На колкаво растојание се наоѓа авионот од местото В и колкаво е растојанието меѓу местата А и В?

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Претвори ги во степени, минути и секунди аглиите:

- а)  $34,41^\circ$       б)  $18,27^\circ$       в)  $23,67^\circ$ .

2. Претвори ги во децимални степени аглиите:

- а)  $36^\circ 25' 36''$       б)  $45^\circ 11' 19''$       в)  $73^\circ 52' 25''$ .

3. Претвори ги во радијани аглиите:

- а)  $25^\circ$       б)  $62^\circ 15'$       в)  $35^\circ 5' 38''$ .

4. Претвори ги во степени аглиите дадени во радијани:

- а)  $\frac{7\pi}{12}$       б) 1,27      в) 0,45.

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а)  $\frac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$       б)  $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2 \cos^2 30^\circ - 1}$       в)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \cos \alpha}$ , за  $\alpha \neq 0$ .

6. Најди го аголот  $\alpha$  за којшто важи:

- а)  $\sin \alpha = \cos 65^\circ$       б)  $\cos \alpha = \sin 42^\circ 50''$   
 в)  $\sin(\alpha + 20^\circ) = \sin 50^\circ$       г)  $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$ .

7. Спореди ги вредностите:

- а)  $\sin 72^\circ$  и  $\sin 27^\circ$       б)  $\cos 31^\circ 20'$  и  $\cos 30^\circ 40'$   
 в)  $\operatorname{tg} 49^\circ$  и  $\operatorname{tg} 29^\circ$       г)  $\operatorname{ctg} 49^\circ 30'$  и  $\operatorname{ctg} 49^\circ 55'$

8. Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски функции, ако е дадено:

- а)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$       б)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$       в)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$       г)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{25}$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а)  $4 \operatorname{tg} \alpha + 5 \cos \alpha$ , ако  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$       б)  $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$ , ако  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ .

10. Реши го правоаголниот триаголник  $ABC$ , ако се дадени:

- а)  $\alpha = 36^\circ 2'$ ,  $c = 68$       б)  $\beta = 64^\circ 20'$ ,  $a = 450$   
 в)  $\beta = 85^\circ 10'$ ,  $b = 0,62$       г)  $a = 230$ ,  $c = 320$   
 д)  $b = 3,9$ ,  $c = 42,5$ .

11. Во рамнокрак трапез, познати се основата  $a$ , кракот  $c$  и аголот  $\alpha$  при основата. Пресметај ги другата основа и висината на трапезот.

12. Аголот под кој се гледа светилникот од патувачки брод изнесува  $25,6^\circ$ . Откако бродот се доближил за 1050 метри до копното, аголот изнесува  $31,2^\circ$ . На која висина е поставен светилникот, мерено од нивото на водата.

### 3. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

#### 3.1. Поим за комплексен број

Комплексните броеви претставуваат важна математичка алатка за физичарите и инженерите кои работат на полето на електрицитетот и магнетизмот, оптиката и хидродинамиката. Оттаму е интересот на математичарите за проучување на комплексните броеви.

Да ја разгледаме равенката  $x^2 = -1$ . Оваа равенка нема реално решение, бидејќи не постои реален број чиј квадрат е негативен број. За да ја решиме равенката  $x^2 = -1$  множеството реални броеви ќе го прошириме до ново множество броеви, во кое дадената равенка има решение. За таа цел, воведуваме нов симбол  $i$ , кој по дефиниција ќе има особина  $i^2 = -1$ . Така добиваме ново множество кое ги содржи реалните броеви и симболот  $i$  и во кое равенката  $x^2 = -1$  има решение.

Дефинираме елементите на новото множество да бидат сите формални записи од облик  $a+bi$ , каде  $a$  и  $b$  се реални броеви, наречени **комплексни броеви**. Вака дефинираното множество се нарекува **множество комплексни броеви** и се означува со  $\mathbb{C}$ . Новиот број  $i$ , за кој  $i^2 = -1$ , се нарекува **имагинарна единица**. Според тоа

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Секој реален број  $a$  ќе го изедначиме со комплексниот број  $a+0i$ , ставајќи  $a = a+0i$ . На таков начин, може да сметаме дека множеството реални броеви  $\mathbb{R}$  е подмножество од множеството комплексни броеви  $\mathbb{C}$ .

Комплексните броеви вообичаено ги означуваме со буквите  $z, w, u, \dots$  итн. Записот  $z = a+bi$  се вика **алгебарска** или **стандардна форма** на комплексните броеви. Бројот  $a$  се нарекува **реален дел**, а бројот  $b$  се нарекува **имагинарен дел**. Притоа ги користиме ознаките  $a = \operatorname{Re}(z)$  и  $b = \operatorname{Im}(z)$ . По договор  $a+(-b)i = a-ib$ .

**Задача 1.** Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = 4+7i$       **б)**  $z = -\frac{1}{3} + \sqrt{2}i$       **в)**  $z = -4$       **г)**  $z = 0$ .

**Решение. а)**  $\operatorname{Re}(z) = 4$  и  $\operatorname{Im}(z) = 7$       **б)**  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3}$  и  $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$

**в)**  $\operatorname{Re}(z) = -4$  и  $\operatorname{Im}(z) = 0$       **г)**  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ . ♦

Комплексен број  $z$  таков што  $\operatorname{Re}(z) = 0$  се вика **чисто имагинарен број**. По договор имаме  $0+bi = bi$ . Како што веќе рековме, комплексен број  $z$  таков што  $\operatorname{Im}(z) = 0$  е реален број.

**Пример 2.** Комплексните броеви  $z = -\sqrt{2}$ ,  $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}$  и  $z = 0$ , се реални броеви, а комплексните броеви  $z = \sqrt{3}i$ ,  $z = -i$  и  $z = (1+\sqrt{2})i$  се чисто имагинарни броеви. ♦

Два комплексни броја се **еднакви** ако и само ако им се еднакви реалните и имагинарните делови, соодветно. Поточно, ако  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  се комплексни броеви, тогаш  $z_1 = z_2$  ако и само ако  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ . Според тоа, еден комплексен број



$z$  е напълно определен ако се познати неговиот реален дел  $\operatorname{Re}(z)$  и неговиот имагинарен дел  $\operatorname{Im}(z)$ . Тогаш комплексниот број  $z$  можеме да го запишеме во облик

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i.$$

**Задача 3.** Одреди го комплексниот број  $z$  ако:

**а)**  $\operatorname{Re}(z) = -2$  и  $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$       **б)**  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 3 - \sqrt{3}$ .

**Решение. а)**  $z = -2 + \sqrt{2}i$       **б)**  $z = -\frac{1}{3} + (3 - \sqrt{3})i$ . ♦

**Задача 4.** За кои реални броеви  $x$  и  $y$  важи равенството

$$2x + (y+1)i = 4y + 3i.$$

Ставаме  $z_1 = 2x + (y+1)i$  и  $z_2 = 4y + 3i$ . Тогаш имаме дека  $\operatorname{Re}(z_1) = 2x$ ,  $\operatorname{Im}(z_1) = y+1$ ,  $\operatorname{Re}(z_2) = 4y$  и  $\operatorname{Im}(z_2) = 3$ . Од дефиницијата за еднаквост на комплексни броеви непосредно добиваме дека  $z_1 = z_2$ , односно  $2x + (y+1)i = 4y + 3i$  ако и само ако  $2x = 4y$  и  $y+1 = 3$ , односно  $x = 4$  и  $y = 2$ . ♦

Два комплексни броја кои се разликуваат само по знакот на имагинарниот дел се нарекуваат **конјугирано комплексни броеви**. Ако  $z = a + bi$  е комплексен број, тогаш нему конјугираниот комплексен број, означен со  $\bar{z}$ , е бројот  $\bar{z} = a - ib$ .

**Задача 5.** Најди го конјугирано комплексниот број на бројот  $z$  ако:

**а)**  $z = 2 + 3i$       **б)**  $z = -\frac{1}{2} - 5i$       **в)**  $z = 1 - \sqrt{2}i$       **г)**  $z = 3 + i$       **д)**  $z = -\frac{1}{2}i$ .

**Решение. а)**  $\bar{z} = 2 - 3i$       **б)**  $\bar{z} = -\frac{1}{2} + 5i$       **в)**  $\bar{z} = 1 + \sqrt{2}i$

**г)**  $\bar{z} = 3 - i$       **д)**  $\bar{z} = \frac{1}{2}i$ . ♦

Ако  $z$  е комплексен број тогаш  $\overline{(\bar{z})} = z$ . Навистина, ако  $z = a + bi$ , тогаш  $\operatorname{Im}(z) = b$ , од каде што следува дека  $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -b$ . Понатаму, од  $\operatorname{Im}(\overline{(\bar{z})}) = -(-b) = b$ , следува дека  $\overline{(\bar{z})} = z$ .

**5.** Најди го  $\overline{(\bar{z})} = z$ , ако  $z = 2 + 3i$ .

**Решение.** Имаме дека  $\overline{(\bar{z})} = z = 2 + 3i$ .

### Задачи

**1.** Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = 4 + 2i$       **б)**  $z = -3 + 4i$       **в)**  $z = -4 + \frac{1}{2}i$       **г)**  $z = 1 + \sqrt{2} + i$   
**д)**  $z = -3$       **е)**  $z = -3i$       **ж)**  $z = m + 3i$       **з)**  $z = 4 - (n-1)i$ .

каде  $m$  и  $n$  се реални броеви.

**2.** Најди го комплексниот број  $z$  ако:

**а)**  $\operatorname{Re}(z) = 3$  и  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$       **б)**  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$   
**в)**  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 0$       **г)**  $\operatorname{Re}(z) = m + 1$  и  $\operatorname{Im}(z) = n - \sqrt{2}$ .

3. За кои реални броеви  $x$  и  $y$  се еднакви комплексните броеви:

- а)  $5 - 8i$  и  $x + yi$       б)  $2x + 8i$  и  $10 + yi$   
 в)  $x - 2y + 2i$  и  $2 - x + (1 + y)i$       г)  $-15 - 2xi$  и  $10y + i$ .

4. Најди го конјугирано комплексниот број на бројот  $z$ , ако:

- а)  $z = 7 + 5i$       б)  $z = -\frac{1}{4} - 6i$       в)  $z = 1 - \sqrt{3}i$       г)  $z = 4 + i$   
 д)  $z = -\frac{1}{3}i$       е)  $z = 5$       ж)  $z = 0$ .

## 3.2. Собирање и одземање на комплексни броеви

### Собирање на комплексни броеви

Ќе дефинираме операција собирање, "+" во множеството од комплексни броеви  $\mathbb{C}$  која што ги исполнува основните својства, односно е комутативна и асоцијативна. Освен тоа збирот на два реални броеви во однос на дефинираната операција ќе биде еднаков на нивниот збир во однос на веќе дефинираната операција собирање реални броеви.

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  се произволни комплексни броеви. Со равенството

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

е дефинирана **операција собирање во множеството на комплексни броеви**. Комплексниот број

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

се вика **збир** на дадените комплексни броеви, наречени **собироци**.

Според тоа, збир на два комплексни броја е комплексен број чијшто реален, односно имагинарен дел е збир на реалните, односно имагинарните делови на собироците, соодветно.

**Задача 1.** Најди го збирот на комплексните броеви  $z_1$  и  $z_2$  ако:

- а)  $z_1 = 3 + 6i$  и  $z_2 = 4 + 2i$       б)  $z_1 = 2 - i$  и  $z_2 = -1 + \frac{1}{2}i$ .

**Решение. а)**  $z_1 + z_2 = (3 + 6i) + (4 + 2i) = (3 + 4) + (6 + 2)i = 7 + 8i$ .

- б)  $z_1 + z_2 = (2 - i) + \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) = (2 - 1) + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)i = 1 - \frac{1}{2}i$ . ♦

Операцијата собирање на комплексни броеви ги има следниве својства:

- а) За секои  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (комутативност)  
 б) За секои  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ,  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  (асоцијативност)  
 в) За секои  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z + 0 = 0 + z = z$  (0 е нула)  
 г) За секој  $z_1 \in \mathbb{C}$ , постои  $z_2 \in \mathbb{C}$ , така што  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0$   
 (секој комплексен број има спротивен комплексен број)

Нека  $z_2, z_3$  се спротивни комплексни броја на бројот  $z_1$ . Заради равенствата  $z_3 + z_1 = 0 = z_2 + z_1$  добиваме дека

$$z_3 = z_3 + 0 = z_3 + (z_1 + z_2) = (z_3 + z_1) + z_2 = 0 + z_2 = z_2.$$

Според тоа секој комплексен број  $z$  има единствен спротивен број, кој ќе го означуваме со  $-z$ . Тогаш велиме дека  $z$  и  $-z$  се **спротивни** еден на друг.

Заради асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање комплексни броеви, можеме да зборуваме за збир на конечно многу комплексни броеви, кој не зависи од групирањето и редоследот на собирање.

**Задача 2.** Најди го збирот на комплексните броеви

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = -2 + i, \quad z_3 = 1 - i, \quad z_4 = -2i \text{ и } z_5 = 6.$$

**Решение.** Имаме дека

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 &= (3 + 4i) + (-2 + i) + (1 - i) + (-2i) + 6 = \\ &= (3 - 2 + 1 + 0 + 6) + (4 + 1 - 1 - 2 + 0)i = 8 - 2i. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

### Одземање на комплексни броеви

Ќе дефинираме операција одземање на комплексни броеви, за која што исто така ќе поставиме услов таа да биде согласна со операцијата одземање на реални броеви.

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z = a_2 + b_2i$  се произволни комплексни броеви. Со равенството

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

е дефинирана **операција одземање во множеството комплексни броеви**. Комплексниот број

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

се вика **разлика** на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2$ , при што  $z_1$  се нарекува **намаленик**, а  $z_2$  **намалител**.

Разлика на еден комплексен број со друг е комплексен број чијшто реален, односно имагинарен дел е разлика на реалните, односно имагинарните делови на намаленикот со намалителот, соодветно.

**Задача 3.** Најди ја разликата  $z_1 - z_2$  ако:

**а)**  $z_1 = 3 + 6i$  и  $z_2 = 4 + 2i$

**б)**  $z_1 = 2 + 4i$  и  $z_2 = 1 - 2i$

**в)**  $z_1 = 3 - 6i$  и  $z_2 = -4 + 7i$ .

**Решение. а)**  $z_1 - z_2 = (3 + 6i) - (4 + 2i) = (3 - 4) + (6 - 2)i = -1 + 4i.$

**б)**  $z_1 - z_2 = (2 + 4i) - (1 - 2i) = (2 - 1) + (4 - (-2))i = 1 + 6i.$

**в)**  $z_1 - z_2 = (3 - 6i) - (-4 + 7i) = (3 - (-4)) + (-6 - 7)i = 7 - 13i. \quad \blacklozenge$

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z = a_2 + b_2i$  се произволни комплексни броеви. Од равенството

$$(a_1 + b_1i) + (-(a_2 + b_2i)) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

можеме да заклучиме дека разликата на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2$  е збир на бројот  $z_1$  со бројот  $-z_2$ , односно со спротивниот број на  $z_2$ .

**Задача 4.** Од комплексниот број  $z_1 = -10 + 7i$  одземи го комплексниот број  $z_2 = -12 + 5i$ .

**Решение.** Според дефиницијата за одземање комплексни броеви добиваме

$$z_1 - z_2 = (-10 + 7i) - (-12 + 5i) = (-10 - (-12)) + (7 - 5)i = 2 + 2i.$$

Од друга страна, ако комплексниот број  $z_1 = -10 + 7i$  го собереме со спротивниот број на комплексниот број  $z_2 = -12 + 5i$ , односно со  $-z_2 = -(-12 + 5i)$ , имаме

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_2) &= (-10 + 7i) + (-(-12 + 5i)) = (-10 + 7i) + (12 - 5i) = \\ &= (-10 + 12) + i(7 - 5) = 2 + 2i \end{aligned}$$

Значи и во двата случаи го добиваме истиот резултат.  $\blacklozenge$

Овој пристап кон операцијата одземање комплексни броеви го олеснува оперирањето со комплексните броеви, бидејќи операцијата собирање е комутативна и асоцијативна.

**Задача 5.** Најди го комплексниот број  $z = z_1 - z_2 + z_3 - z_4$ , ако е дадено дека  $z_1 = -11 + 3i$ ,  $z_2 = 7 + i$ ,  $z_3 = 2 - i$  и  $z_4 = -2i$ .

$$\begin{aligned}\text{Решение. } z &= z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = (-11 + 3i) - (7 + i) + (2 - i) - (-2i) = \\ &= (-11 + 3i) + (-(7 + i)) + (2 - i) + (-(-2i)) = \\ &= (-11 + 3i) + (-7 - i) + (2 - i) + 2i = \\ &= (-11 - 7 + 2) + (3 - 1 - 1 + 2)i = -16 + 3i. \blacklozenge\end{aligned}$$

Конјугирано комплексните броеви имаат некои интересни својства во однос на операциите собирање и одземање комплексни броеви.

**Задача 6.** Најди ги збирот и разликата на комплексниот број  $z = 1 + 2i$  со нему конјугираниот комплексен број.

**Решение.** Комплексниот број  $\bar{z} = 1 - 2i$  е конјугирано комплексен број на дадениот. Тогаш

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (1 + 2i) + (1 - 2i) = (1 + 1) + (2 - 2)i = 2 \text{ и} \\ z - \bar{z} &= (1 + 2i) - (1 - 2i) = (1 - 1) + i(2 - (-2)) = 4i. \blacklozenge\end{aligned}$$

Од задача 6 забележуваме дека за секој комплексен број  $z$  важи

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z) \text{ и} \\ z - \bar{z} &= (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \operatorname{Im}(z)i.\end{aligned}$$

**Задача 7.** Нака  $z_1 = 3 - i$  и  $z_2 = -2 + 3i$  се два комплексни броеви. Најди ги комплексните броеви  $\overline{z_1}$ ,  $\overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 + z_2}$ ,  $\overline{z_1 - z_2}$ ,  $\overline{z_1 - z_2}$  и  $\overline{z_1 - z_2}$ .

$$\begin{aligned}\text{Решение. } \overline{z_1} &= 3 + i, \quad \overline{z_2} = -2 - 3i, \\ \overline{z_1 + z_2} &= (3 + i) + (-2 - 3i) = 1 - 2i, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 - i) + (-2 + 3i)} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i, \\ \overline{z_1 - z_2} &= (3 + i) - (-2 - 3i) = 5 + 4i, \\ \overline{z_1 - z_2} &= (3 - i) - (-2 + 3i) = 5 - 4i = 5 + 4i. \blacklozenge\end{aligned}$$

За секои  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , важат равенствата

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ и } \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Навистина, ако  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$ , тогаш  $\overline{z_1} = a_1 - b_1i$  и  $\overline{z_2} = a_2 - b_2i$ , од каде што добиваме дека

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ и} \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i} = \\ &= (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)i = (a_1 - b_1i) - (a_2 - b_2i) = \overline{z_1} - \overline{z_2}.\end{aligned}$$

## Задачи

1. Најди го збирот на комплексните броеви  $z_1$  и  $z_2$ , ако

**а)**  $z_1 = 3 + 2i$  и  $z_2 = 4 + 7i$

**б)**  $z_1 = -40 - 20i$  и  $z_2 = -13i$

**в)**  $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  и  $z_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$

**г)**  $z_1 = 4\sqrt{7} - 6\sqrt{8}i$  и  $z_2 = -\sqrt{28} - 5\sqrt{18}i$ .

2. Дали комплексните броеви  $z_1 = \frac{1}{2} - 16i$  и  $z_2 = -\frac{1}{2} + 16i$  се спротивни еден на друг?

3. Пресметај ја разликата на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2$ , ако

а)  $z_1 = 18 - 50i$  и  $z_2 = -9 - 20i$

б)  $z_1 = 74 - 12i$  и  $z_2 = 15i$

в)  $z_1 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{10}i$  и  $z_2 = \frac{5}{3} - \frac{9}{10}i$

г)  $z_1 = \sqrt{28} + \sqrt{24}i$  и  $z_2 = \sqrt{63} - \sqrt{54}i$ .

4. Најди ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$  ако:

а)  $z = (-4 + i) - (16 - 2i) + (29 - i)$

б)  $z = 17i + (-11 - 8i) - 14i + 6$

в)  $z = 25 - 6i - 3 - 5i + 13i - 49$

г)  $z = 52 - ((61 + 40i) - (-10 + i))$ .

5. Нека  $z_1 = 2 - i$  и  $z_2 = -1 + 2i$  се два комплексни броеви. Најди ги комплексните броеви  $\overline{z_1}$ ,  $\overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 + z_2}$ ,  $\overline{z_1 + z_2}$ ,  $\overline{z_1 - z_2}$  и  $\overline{z_1 - z_2}$ .

### 3.3. Множење и делење на комплексни броеви

#### Множење на комплексни броеви

Ќе дефинираме операција множење во множеството комплексни броеви  $\mathbb{C}$ . Наша цел е дефинираната операција да ги исполнува основните својства, кои ги поседуваат реалните броеви, односно таа да биде комутативна, асоцијативна и дистрибутивна во однос на собирањето, како и да биде согласна со операцијата множење реални броеви.

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  се произволни комплексни броеви. Со равенството

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

е дефинирана **операција множење во множеството комплексни броеви**. Комплексниот број

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

се вика **производ** на дадените комплексни броеви, наречени **множител**.

Интуитивно, со комплексните броеви зададени во алгебарска форма оперираме слично како со реалните полиноми, односно комплексните броеви ги множиме како полиноми по имагинарната единица  $i$ , земајќи предвид дека  $i^2 = -1$ .

**Задача 1.** Најди го производот на комплексните броеви  $z_1$  и  $z_2$ , ако:

а)  $z_1 = 3 + 6i$  и  $z_2 = 4 + 2i$ ; б)  $z_1 = 2 + 4i$  и  $z_2 = 1 - 2i$ .

**Решение. а)**  $z_1z_2 = (3 + 6i)(4 + 2i) = (3 \cdot 4 - 6 \cdot 2) + (3 \cdot 2 + 6 \cdot 4)i =$   
 $= 0 + 30i = 30i$

б)  $z_1z_2 = (2 + 4i)(1 - 2i) = (2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1)i = 10. \blacklozenge$

Операцијата множење на комплексни броеви ги има следниве својства:

а) За секои  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1z_2 = z_2z_1$  (комутативност)

б) За секои  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ,  $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$  (асоцијативност)

в) За секој  $z \in \mathbb{C}$ ,  $1z = z1 = z$  (1 е единица)

г) За секој  $z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq 0$ , постои  $z_2 \in \mathbb{C}$ , така што  $z_1z_2 = z_2z_1 = 1$ .

(секој комплексен број, различен од 0, има инверзен број)

**д)** За секои  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ,  $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$  и  $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

(множењето е дистрибутивно во однос на собирањето)

**Задача 2.** Најди го реципрочниот број на комплексниот број

$$z = ((1 + 3i) + (2 - 5i))(1 - i).$$

**Решение.** Од

$$\begin{aligned} z &= ((1 + 3i) + (2 - 5i))(1 - i) = ((1 + 2) + (3 - 5)i)(1 - i) = \\ &= (3 - 2i)(1 - i) = 1 - 5i \end{aligned}$$

следе дека

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1^2 + (-5)^2} - \frac{(-5)}{1^2 + (-5)^2}i = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}i. \blacklozenge$$

Знаејќи да помножиме два комплексни броја, можеме да помножиме конечно многу комплексни броеви. Заради комутативноста и асоцијативноста на операцијата множење комплексни броеви производот на конечно многу комплексни броеви не зависи од групирањето на множителите и од редоследот на множењето.

### Делење на комплексни броеви

Ќе дефинираме операција делење на комплексни броеви, за која што исто така ќе поставиме услов да биде согласна со операцијата делење реални броеви.

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$ ,  $z_2 \neq 0$  се произволни комплексни броеви. Со равенството

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

е дефинирана **операција делење во множеството комплексни броеви**.

Комплексниот број

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

се вика **количник** на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2$ , при што  $z_1$  се нарекува **деленик**, а  $z_2$  **делител**.

Да воочиме дека  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ , бидејќи  $z_2 \neq 0$ .

**Задача 3.** Најди го количникот на комплексниот број  $z_1 = 5 + i$  со комплексниот број  $z_2 = 3 - 8i$ .

**Решение.** 
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + i}{3 - 8i} = \frac{5 \cdot 3 + 1 \cdot (-8)}{3^2 + (-8)^2} + i \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot (-8)}{3^2 + (-8)^2} = \frac{7}{73} + \frac{43}{73}i. \blacklozenge$$

Нека  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  се произволни комплексни броеви. Од равенствата

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \text{ и } z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a_1 + b_1i) \frac{1}{a_2 + b_2i} = \\ &= (a_1 + b_1i) \left( \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i, \end{aligned}$$

можеме да заклучиме дека

$$z_1 : z_2 = z_1 \cdot \frac{1}{z_2},$$

односно количник на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2 \neq 0$  е производот на бројот  $z_1$  со бројот  $\frac{1}{z_2}$ , односно со реципрочниот број на  $z_2$ .

За ефективно наоѓање на количникот на два комплексни броја се користи методот на проширување на количникот со конјугирано комплексниот број на делителот.

**Пример 1.** Да го примениме методот на проширување на количникот со конјугирано комплексниот број на делителот за определување на количникот даден во претходниот пример. Од

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{3-8i} = \frac{(5+i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{15+3i+40i+8i^2}{9-64i^2} = \frac{7}{73} + \frac{43}{73}i,$$

можеме да заклучиме дека и во двата случаи го добиваме истиот резултат. ♦

Според вака дефинираните операции множење и делење, за позитивните степени на имагинарната единица имаме дека

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^5 &= i^4 i = i, \\ i^2 &= ii = (0+i)(0+i) = -1, & i^6 &= i^5 i = -1, \\ i^3 &= i^2 i = (-1)i = -i, & i^7 &= i^6 i = (-1)i = -i, \\ i^4 &= i^3 i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1, & i^8 &= i^7 i = (-i)i = -i^2 = 1. \end{aligned}$$

За негативните степени на имагинарната единица имаме дека

$$\begin{aligned} i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i, & i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1, & i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i, & i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = 1. \\ i^{-5} &= \frac{1}{i^5} = -i, & i^{-6} &= \frac{1}{i^6} = -1, & i^{-7} &= \frac{1}{i^7} = i, & i^{-8} &= \frac{1}{i^8} = 1. \end{aligned}$$

По дефиниција имаме дека  $i^0 = 1$ .

Ако ја продолжиме погорната постапка, може да заклучиме дека за степените на имагинарната единица важат равенствата

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Користејќи ја операцијата множење на комплексни броеви, може да вршиме степенување на комплексните броеви, на начин сличен како кај полиноми.

**Пример 2. а)** Ако  $x, y \in \mathbb{R}$ , тогаш  $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$

**б)**  $(3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$

**в)**  $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot 9i^2 + (3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$  ♦

**Задача 5.** Нека  $z_1 = 4 - i$  и  $z_2 = -1 + 3i$  се два комплексни броеви. Најди ги комплексните броеви  $\overline{z_1}$ ,  $\overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2}$ ,  $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$  и  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

**Решение.** Имаме дека

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= 4 + i, & \overline{z_2} &= -1 - 3i \\ \overline{z_1 z_2} &= (4 + i)(-1 - 3i) = -1 - 13i \\ \overline{z_1 z_2} &= (4 - i)(-1 + 3i) = -1 + 13i = -1 - 13i \\ \frac{\overline{z_1}}{z_2} &= \frac{4 + i}{-1 - 3i} = -\frac{7}{10} + \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{4-i}{-1+3i}\right)} = \overline{\left(\frac{(4-i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}\right)} = \overline{-\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i} = -\frac{7}{10} + \frac{11}{10}i. \blacklozenge$$

За секои  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  важи равенството

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Навистина, ако  $z_1 = a_1 + b_1 i$  и  $z_2 = a_2 + b_2 i$ , тогаш  $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$  и  $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$ , од каде што добиваме дека

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = \\ &= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Слично, може да покажеме дека за секои  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  важи равенството

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0).$$

Навистина, ако  $z_2 \neq 0$ , тогаш

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}\right)} = \overline{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{a_1 - b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \end{aligned}$$

## Задачи

1. Најди го производот на комплексните броеви  $z_1$  и  $z_2$ , ако:

**а)**  $z_1 = 8 + 9i$  и  $z_2 = 6i$

**б)**  $z_1 = -1 + 10i$  и  $z_2 = -11i$

**в)**  $z_1 = -2 + i$  и  $z_2 = 3 - 2i$

**г)**  $z_1 = 9 + \sqrt{12}i$  и  $z_2 = 7 - \sqrt{3}i$ .

2. Најди го реципрочниот број на комплексниот број  $z = 1 + 5i$ .

3. Пресметај го количникот на комплексниот број  $z_1$  со комплексниот број  $z_2$ , ако:

**а)**  $z_1 = 8i$  и  $z_2 = 6$

**б)**  $z_1 = -16 - 4i$  и  $z_2 = -8$

**в)**  $z_1 = -42 + 7i$  и  $z_2 = 7i$

**г)**  $z_1 = -31 + 12i$  и  $z_2 = 4 - i$ .

4. Провери ја точноста на равенствата:

**а)**  $\frac{-12 + 16i}{8 - 4i} = -2 + i$

**б)**  $\frac{-23 + 41i}{1 + 3i} = 10 + 11i$ .

5. Најди ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = \frac{3 - 11i}{1 + 5i}$

**б)**  $z = \frac{8 - 2i}{-5 - 3i}$

**в)**  $z = \frac{32 + \sqrt{5}i}{1 + 2\sqrt{5}i}$ .



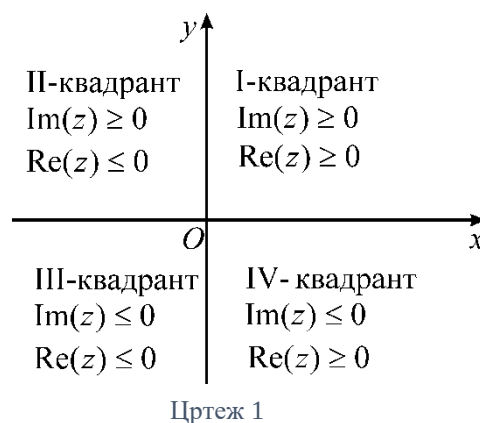
### 3.4. Геометриско претставување на комплексен број. Модул на комплексен број

#### Претставување на комплексни броеви во комплексна рамнина

Во една рамнина  $\Sigma$  фиксираме Декартов правоаголен координатен систем  $xOy$ . Рамнината  $\Sigma$  заедно со овој координатен систем се вика **комплексна рамнина**,  $x$ -оската се вика **реална оска**, а  $y$ -оската **имагинарна оска**.

Нека  $z = a + bi$  е произволен комплексен број. Тогаш на реалните броеви  $a$  и  $b$  кореспондираат единствени точки  $M_1$  и  $M_2$  на  $x$ -оската, односно на  $y$ -оската, соодветно. Според тоа, постои единствена точка  $M$  во координатната рамнина, со апсциса  $a$  и ордината  $b$ .

Реалната и имагинарната оска ја делат комплексната рамнина на четири области наречени квадранти: I-квадрант, II-квадрант, III-квадрант и IV-квадрант (цртеж 1). При тоа комплексниот број  $z$  припаѓа во: I-квадрант ако  $\text{Im}(z) \geq 0$  и  $\text{Re}(z) \geq 0$ ; II-квадрант ако  $\text{Im}(z) \geq 0$  и  $\text{Re}(z) \leq 0$ ; III-квадрант ако  $\text{Im}(z) \leq 0$  и  $\text{Re}(z) \leq 0$ ; IV-квадрант ако  $\text{Im}(z) \leq 0$  и  $\text{Re}(z) \geq 0$ . Специјално, реален број ( $\text{Im}(z) = 0$ ) е точка од реалната оска, додека чисто имагинарен број ( $\text{Re}(z) = 0$ ) е точка од имагинарната оска. Бројот  $z = 0$  ( $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$ ) е претставен со точката  $O$  (цртеж 1).



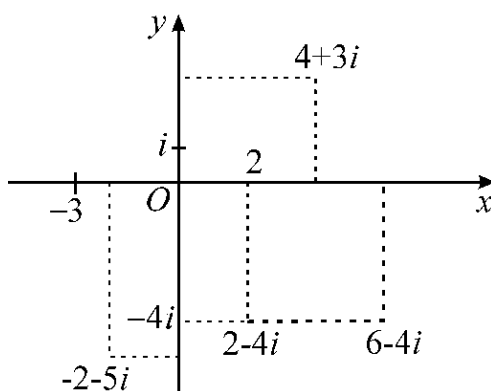
Цртеж 1

**Задача 1.** Во комплексната рамнина претстави ги броевите:

- а)  $z = 4 + 3i$       б)  $z = 2 - 4i$       в)  $z = -2 - 5i$       г)  $z = 6 - 4i$   
 д)  $z = 2$       ф)  $z = -3$       е)  $z = i$       ж)  $z = -4i$ .

и определи во кој квадрант, односно на која оска припаѓаат.

**Решение.** а) I-квадрант, б) II-квадрант, в) III-квадрант, г) IV-квадрант,  
 д)  $x$ -оска, ф)  $x$ -оска, е)  $y$ -оска, ж)  $y$ -оска (цртеж 2). ♦

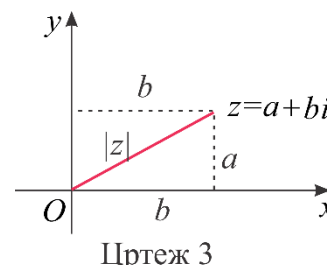


Цртеж 2

## Модул на комплексен број

Важен концепт кај комплексните броеви е нивниот модул. Нека комплексниот број  $z = a + bi$  е претставен во комплексната рамнина со точка  $M$ . Растојанието од точката  $O$  до точката  $M$  во комплексната рамнина се вика **модул** на дадениот комплексен број  $z$  и се означува со  $|z|$ .

Модулот ќе го пресметаме на следниов начин (цртеж 3). Од точката  $M$  на дадениот комплексниот број спуштаме нормала на  $x$ -оската, при што добиваме правоаголен триаголник со катети  $|a|$ ,  $|b|$  и хипотенуза  $|z|$ . Со примена на Питагоровата теорема добиваме  $|z|^2 = |a|^2 + |b|^2$ . Имајќи го



Цртеж 3

предвид равенството  $|x|^2 = x^2$ , за секој реален број  $x$ , за модулот на дадениот комплексен број добиваме  $|z|^2 = a^2 + b^2$ , односно

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Бидејќи  $a = \operatorname{Re}(z)$  и  $b = \operatorname{Im}(z)$ , добиваме дека

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

односно, модулот на дадениот комплексен број е позитивен реален број, еднаков на квадратниот корен од збирот на квадратите на реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број.

Непосредно заклучуваме дека  $|z| = 0$  ако и само ако  $z = 0$ .

Да забележиме дека два конјугирано комплексни броеви имаат еднакви модули. Навистина за произволен комплексен број  $z$  важи

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} = |\bar{z}|$$

односно,

$$|z| = |\bar{z}|.$$

Еднакви модули имаат и комплексни броеви спротивни еден на друг. За произволен комплексен број  $z$ , од

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-\operatorname{Re}(z))^2 + (-\operatorname{Im}(z))^2} = |-z|$$

заклучуваме дека

$$|z| = |-z|.$$

**Задача 2.** Најди го модулот на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = -4 + 3i$

**б)**  $z = -2i$

**в)**  $z = -4$ .

**Решение.** **а)** Според формулата за пресметување модул на комплексен број добиваме

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

**б)**  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

**в)**  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4. \blacklozenge$

Постои врска помеѓу модулот на комплексен број, самиот број и неговиот конјугирано комплексен број. Имено, за било кој комплексен број  $z$  важи

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Навистина, ако  $z = a + ib$ , тогаш  $\bar{z} = a - ib$ , од каде што добиваме дека

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + ib)(a - ib) = (a + ib)(a + i(-b)) = \\ &= a \cdot a - b \cdot (-b) + i(a \cdot (-b) + ba) = a^2 + b^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Определи го  $|z|$ , ако:

**а)**  $z = -2 + i$       **б)**  $z = -i$       **в)**  $z = 3$ .

**Решение. а)**  $|z|^2 = (-2 + i)(-2 - i) = 5$  од каде следува дека  $|z| = \sqrt{5}$

**б)**  $|z|^2 = (0 + i)(0 - i) = 1$ , од каде следува дека  $|z| = 1$

**в)**  $|z|^2 = (3 + 0i)(3 - 0i) = 9$ , од каде следува дека  $|z| = 3$ . ♦

### Задачи

**1.** Во комплексната рамнина претстави ги броевите:

**а)**  $z = 1 + 2i$ ;    **б)**  $z = 2 - i$ ;    **в)**  $z = -2 - \frac{1}{2}i$ ;    **г)**  $z = \frac{1}{3} - 4i$ ;

**д)**  $z = \frac{1}{2}$ ;    **е)**  $z = -1$ ;    **ж)**  $z = 3i$ ;    **з)**  $z = -i$ .

и определи во кој квадрант, односно на која оскла припаѓаат.

**2.** Најди го модулот на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = 4 + 2i$       **б)**  $z = -1 - i$       **в)**  $z = 1 - 2i$   
**г)**  $z = -4 + 2i$     **д)**  $z = -i$       **е)**  $z = -2$ .

**3.** Нека  $z = 1 - 2i$  е даден комплексен број. Пресметај ги броевите  $|z|$ ,  $|\bar{z}|$  и  $|-z|$ . Спореди ги добиените вредности.

**4.** Најди комплексен број  $z = 3x - i$ , каде  $x$  е реален број, ако  $|z| = 2$ .

**5.** Најди комплексен број  $z$ , таков што  $2\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$  и  $|z| = 2$ .

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

**1.** Најди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

**а)**  $z = -1 - i$       **б)**  $z = -\frac{1}{2}$       **в)**  $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}i$   
**г)**  $z = m - 1 + \sqrt{2} + i$     **д)**  $z = (m - n)i$     **е)**  $z = 1 - \sqrt{3} + n$

каде  $m$  и  $n$  се реални броеви.

**2.** За кои реални броеви  $x$  и  $y$  се еднакви комплексните броеви:

**а)**  $-3 + 12i$  и  $x + 3yi$       **б)**  $2x - y + 2i$  и  $x - 3 + (1 - y)i$   
**в)**  $y\sqrt{12} - \frac{4}{9}i$  и  $\sqrt{3} + \frac{x}{3}i$     **г)**  $\sqrt{2} + i$  и  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}i$ .

**3.** Најди го конјугирано комплексниот број на бројот  $z$ , ако:

- а)  $z = 7 - 5i$       б)  $z = -\frac{1}{4}i$       в)  $z = 1 - \sqrt{3}i$   
г)  $z = a + \sqrt{2} + bi$       д)  $z = a - b + 3ai$       е)  $z = 1 + a + \sqrt{2} + (b + \sqrt{3})i$

каде  $a$  и  $b$  се реални броеви.

4. Најди ги збирот  $z_1 + z_2$  и разликата  $z_1 - z_2$ , ако:

- а)  $z_1 = 7 - i$  и  $z_2 = 5 + 3i$       б)  $z_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i$  и  $z_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$   
в)  $z_1 = \sqrt{17} - 3\sqrt{2}i$  и  $z_2 = -\sqrt{68} - 5\sqrt{18}i$ .

каде  $m$  и  $n$  се реални броеви.

5. Најди го спротивниот комплексен број на комплексниот број  $z$ , ако:

- а)  $\operatorname{Re}(z) = -13$  и  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}$       б)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$  и  $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2} - 3$   
в)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 0$       г)  $\operatorname{Re}(z) = m - 1$  и  $\operatorname{Im}(z) = n + \sqrt{2}$

каде  $m$  и  $n$  се реални броеви.

6. Најди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

- а)  $z = (-3 + 2i) - (1 - 7i) + (9 - 5i)$       б)  $z = 13i + (1 - 4i) - 4i + 5$   
в)  $z = 2 - 4i - 7 - i + 3i - 9$       г)  $z = 5 - ((6 + 4i) - (-12 + i))$ .

7. Најди ги производот  $z_1 \cdot z_2$  и количникот на комплексните броеви  $z_1$  и  $z_2$ , ако:

- а)  $z_1 = 8 - 5i$  и  $z_2 = 9 - 2i$       б)  $z_1 = 4 - 2i$  и  $z_2 = 12i$   
в)  $z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}i$  и  $z_2 = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}i$       г)  $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$  и  $z_2 = \sqrt{12} - \sqrt{8}i$ .

8. Најди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број  $z$ , ако:

- а)  $z = \frac{3-i}{1+2i}$       б)  $z = \frac{3-2i}{-5-i}$       в)  $z = \frac{1-5i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$ .

9. Најди го реципрочниот комплексен број на комплексниот број  $z$ , ако:

- а)  $z = 1 - 9i$       б)  $z = -1 + 10i$       в)  $z = -2 + i$       г)  $z_1 = 9 + \sqrt{12}i$ .

10. Претстави ги во комплексната рамнина броевите:

- а)  $z = 1 + 3i$       б)  $z = 2 - 4i$       в)  $z = -2 + 4i$       г)  $z = 1 - 3i$   
д)  $z = -2 - 4i$       е)  $z = -1 + 3i$       ж)  $z = 2 + 4i$       з)  $z = -1 - 3i$ .

11. Определи го модулот на комплексниот број  $z$ , ако:

- а)  $\operatorname{Re}(z) = 3$  и  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$       б)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$   
в)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$  и  $\operatorname{Im}(z) = 0$       г)  $\operatorname{Re}(z) = m + 1$  и  $\operatorname{Im}(z) = n - \sqrt{2}$

каде  $m$  и  $n$  се реални броеви.

## 4. КВАДРАТНА РАВЕНКА

Квадратните равенки имаат голема примена во математиката, физиката, хемијата и во другите науки. Многу практични проблеми се решаваат со помош на квадратна равенка, составувајќи математички модел според зададените услови. Од тие причини оваа глава е посветена на изучувањето на квадратните равенки и нивната примена.

### 4.1. Квадратна равенка и видови

Во претходната учебна година се запознавме со поимите равенка, дефинициона област на равенка, решение на равенка и еквивалентни равенки.

Равенка од втор степен со една непозната се вика квадратна равенка со една непозната или накусо, **квадратна равенка**. Со соодветни трансформации секоја квадратна равенка може да ја доведеме до еквивалентна равенка од видот

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

наречен **општ вид** на квадратната равенка, каде што  $a$ ,  $b$  и  $c$  се реални броеви или изрази што не зависат од  $x$ . Притоа, вообичаено,  $a$ ,  $b$  и  $c$  се викаат **коефициенти на квадратната равенка**. Коефициентот  $a$  се вика **прв коефициент** или **коефициент пред највисокиот степен на непознатата**, коефициентот  $b$  се вика **втор коефициент** или **среден коефициент**, а коефициентот  $c$  се вика **трет коефициент** или **слободен член**.

**Пример 1. а)** Равенката  $3x^2 - 4x + 2 = 0$  е квадратна равенка со коефициенти  $a = 3$ ,  $b = -4$  и  $c = 2$ .

**б)** Равенката  $x^2 - 3x + 1 = 0$  е квадратна равенка со коефициенти  $a = 1$ ,  $b = -3$  и  $c = 1$ .

**в)** Равенката  $x^2 - 3 = 0$  е квадратна равенка со коефициенти  $a = 1$ ,  $b = 0$  и  $c = -3$ .

**г)** Равенката  $-2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$  е квадратна равенка со коефициенти  $a = -2$ ,  $b = \frac{1}{3}$  и  $c = 0$ . ♦

Квадратна равенка од општ вид се вика **полна квадратна равенка** ако коефициентите  $b$  и  $c$  се различни од нула.

**Пример 2.** Равенката  $3x^2 - x + 5 = 0$  е полна квадратна равенка.

Квадратна равенка од општ вид се вика **неполна квадратна равенка** ако барем еден од коефициентите  $b$  и  $c$  е еднаков на нула. ♦

**Пример 3. а)** Равенката  $2x^2 - 5x = 0$  е неполна квадратна равенка.

**б)** Равенката  $x^2 + \frac{1}{2} = 0$  е неполна квадратна равенка.

**в)** Равенката  $7x^2 = 0$  е неполна квадратна равенка. ♦

Ако квадратната равенка (1) ја поделиме со  $a$  (тоа е можно бидејќи  $a \neq 0$ ), ја добиваме еквивалентната равенка

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ставајќи  $\frac{b}{a} = p$  и  $\frac{c}{a} = q$  дадената равенка ја доведуваме до равенка од видот

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

наречен **нормален вид** на квадратна равенка. Да забележиме дека равенките (1) и (2) се еквивалентни.

**Пример 4.** Ако равенката  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  ја поделиме со 2 ја добиваме равенката  $x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$  која е во нормален вид.

### Задачи

1. Која е следниве равенки е квадратна равенка:

**а)**  $0 \cdot x^2 + 3x - 1 = 0$

**б)**  $8x^2 + 5 = 0$

**в)**  $3x + 8 = 0?$

2. Провери дали  $x = 1$  е корен на равенката:

**а)**  $2x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

**б)**  $x^2 - 3x + 2 = 0$

**в)**  $5x^2 + 4x + 7 = 0.$

3. Трансформирај ги во општ вид следниве квадратни равенки:

**а)**  $3x^2 + 2 = 3x$

**б)**  $4(x^2 - 2) = 8$

**в)**  $\frac{2}{x-4} = x+1, \quad x \neq 4.$

4. Трансформирај ги во нормален вид следниве квадратни равенки:

**а)**  $2x^2 + 3x + 7 = 0$

**б)**  $4x^2 - 2x = 8$

**в)**  $3x^2 + 2 = 0.$

5. Која од следниве равенки е неполна квадратна равенка:

**а)**  $x^2 - 7x - 5 = 0$

**б)**  $4x^2 = 2$

**в)**  $x^2 + 2,5 - 4x + 5 = 7,5.$

## 4.2. Решавање на неполна квадратна равенка

### Неполна квадратна равенка

Како што веќе спомнавме решение или корен на дадена квадратна равенка е секоја вредност на непознатата од дефиниционото множество за кое равенката преминува во точно бројно равенство.

**Пример 1. а)** Реалните броеви  $x = 3$  и  $x = -3$  се корени на квадратната равенка  $x^2 - 9 = 0$ ,

**б)** Реалните броеви  $x = 3$  и  $x = 5$  се корени на равенката  $x^2 - 8x + 15 = 0$ ,

**в)** Комплексните броеви  $x = 2i$  и  $x = -2i$  се корени на квадратната равенка  $x^2 + 4 = 0$ . ♦

Да се реши една квадратна равенка значи да се определи нејзиното множество решенија, односно да се определат сите нејзини корени или да се заклучи дека таа нема корени. Како што спомнавме во претходното поглавје равенките од облик  $ax^2 + bx = 0$ ,  $ax^2 + c = 0$  и  $ax^2 = 0$  се нарекуваат **неполни квадратни равенки**. Во ова поглавје ќе пристапиме кон решавање на овие три вида неполни квадратни равенки.

### Решавање на неполни квадратна равенка од облик $ax^2 + bx = 0$

**Задача 2.** Реши ја квадратната равенка  $3x^2 - 4x = 0$ .

**Решение.** Левата страна на равенката ја разложуваме на множители а потоа користејќи го тврдењето дека производ на два множители е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множителите е еднаков на нула, добиваме

$$3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ или } 3x - 4 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ или } x = \frac{4}{3}).$$

Според тоа корените на дадената равенка се  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{4}{3}$ . ♦

Во општ случај равенка од облик

$$ax^2 + bx = 0$$

е еквивалентна со равенката  $x(ax + b) = 0$ . Имајќи предвид дека производ на два множители е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множителите е еднаков на нула, заклучуваме дека  $x(ax + b) = 0$  ако и само ако  $x = 0$  или  $x = -\frac{b}{a}$ . Значи во овој случај равенката има два реални корени

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Да забележиме дека едниот од корените е секогаш еднаков на нула.

**Задача 3.** Реши ја квадратната равенка  $5x^2 = 0$ .

**Решение.** За равенката  $5x^2 = 0$  имаме  $5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . ♦

Ако во квадратната равенка  $ax^2 + bx = 0$  коефициентот  $b = 0$ , тогаш таа добива облик  $ax^2 = 0$ . Бидејќи  $a \neq 0$  реалниот број  $x = 0$  е двоен корен на дадената равенка.

Според тоа, можеме да заклучиме дека квадратната равенката

$$ax^2 + bx = 0$$

има два реални корени  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{b}{a}$ . Специјално, квадратната равенка

$$ax^2 = 0$$

има еден двоен реален корен  $x = 0$ .

**Задача 4.** Реши ја квадратната равенка  $b(x^2 - x) = 0$ , каде што  $b$  е реален параметар.

**Решение.** Ако  $b = 0$  тогаш секој реален број  $x = x_0$  е решение на дадената равенката, односно равенката има бесконечно многу решенија.

Ако  $b \neq 0$  тогаш дадената равенка е еквивалентна со равенката со равенката  $b(x(x - 1)) = 0$ , односно со равенката  $x(x - 1) = 0$ . Според тоа корени на дадената равенка се  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ . ♦

**Решавање на неполна квадратна равенка од облик  $ax^2 + c = 0$** **Задача 5.** Решај ја квадратната равенка  $x^2 + 1 = 0$ .**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на равенката  $x^2 = -1$ , за која, во претходната глава, рековме дека за корен ја има имагинарната единица  $i$ . Бидејќи  $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)i(-1)i = (-1)^2 i^2 = i^2 = -1$ , заклучуваме дека и комплексниот број  $-i$  е корен на дадената равенка. Според тоа, корени на дадената равенка се  $x_1 = i$  и  $x_2 = -i$ . ♦**Задача 6.** Решај ја квадратната равенка  $x^2 - 3 = 0$ .**Решение.** Дадената равенка е еквивалентна со равенката  $x^2 = 3$ . Бидејќи два позитивни броја се еднакви ако и само ако се еднакви нивните квадрати, добиваме

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pm x = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x = \sqrt{3} \text{ или } x = -\sqrt{3}).$$

Според тоа корените на дадената равенка се  $x_1 = \sqrt{3}$  и  $x_2 = -\sqrt{3}$ . ♦

Во општ случај равенка од облик

$$ax^2 + c = 0$$

е еквивалентна со равенката

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

• Ако  $a > 0$  и  $c > 0$ , или  $a < 0$  и  $c < 0$  тогаш  $-\frac{c}{a}$  е негативен реален број. Во тој случај,  $\left(\pm i \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 = (\pm i)^2 \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$  од каде што следува дека корени на дадената равенка се комплексните броеви

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}i \text{ и } x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}i.$$

• Ако  $a > 0$  и  $c < 0$ , или  $a < 0$  и  $c > 0$  тогаш  $-\frac{c}{a}$  е позитивен реален број. Имајќи предвид дека два позитивни броја се еднакви ако и само ако се еднакви нивните квадрати, добиваме  $\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$  што е еквивалентно со  $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ , односно  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ . Според тоа корените на дадената равенка се

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Од направената дискусија можеме да заклучиме дека ако коефициентите во квадратната равенката

$$ax^2 + c = 0$$

имаат исти знаци тогаш равенката има комплексни корени

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}i \text{ и } x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}i,$$

додека ако тие се со спротивни знаци тогаш равенката има реални корени



$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

**Задача 7.** Реши ја квадратната равенката

$$(x+m)(x-m) = n(2m+n),$$

каде што  $m$  и  $n$  се реални параметри.

**Решение.** Равенка е еквивалентна на равенката  $x^2 - m^2 = 2mn + n^2$ , којашто понатаму е еквивалентна на равенката  $x^2 = (m+n)^2$ . За секоја вредност на реалните параметри  $m$  и  $n$ , последната равенка има два реални корени

$$x_1 = m+n \text{ и } x_2 = -m-n. \spadesuit$$

### Задачи

1. Реши ги следниве квадратни равенки:

**а)**  $x^2 = 0$       **б)**  $7y^2 = 0$       **в)**  $kx^2 = 0$ ,  $k$  е реален параметар.

2. Реши ги следните квадратни равенки:

**а)**  $x^2 - 7x = 0$       **б)**  $x^2 + 2x = 0$       **в)**  $2x^2 - 12x = 0$   
**г)**  $\frac{1}{5}x^2 + 2x = 0$       **д)**  $7x^2 + x = x(x-1)$       **е)**  $(3x-2) - (x-3)^2 + 11 = 0$ .

3. Реши ги следниве квадратни равенки:

**а)**  $x^2 - 9 = 0$       **б)**  $x^2 - 2 = 0$       **в)**  $3x^2 - 2 = 0$   
**г)**  $5x^2 = 125$       **д)**  $\frac{1}{2}y^2 - \frac{8}{25} = 0$       **е)**  $\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}$ .

4. Најди ги корените на следниве квадратни равенки:

**а)**  $x^2 + 1 = 0$       **б)**  $2x^2 + 3 = 0$       **в)**  $7x^2 + \frac{1}{2} = 0$   
**г)**  $2y^2 + 13 = 5$       **д)**  $(2x-7)^2 = 25 - 28x$       **е)**  $x^2 - (\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}-1)x + 3 = 0$ .

5. Реши ги равенките:

**а)**  $\sqrt{(3x-1)^4} = 0$       **б)**  $\sqrt{(x^2+2x+1)^2} = 1$       **в)**  $\sqrt{(x^2-4x+4)^2} = 4$ .

6. Реши ги следниве параметарски квадратни равенки:

**а)**  $\frac{ax^2}{b} + \frac{1}{a} = 0$       **б)**  $\frac{ax^2}{b} + \frac{x}{a} = 0$ .

### 4.3. Решавање на полна квадратна равенка

Во ова поглавје ќе определиме алгоритам како и формула за решавање на полна квадратна равенка.

Нека е дадена полна квадратна равенка во општ вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

Ако двете страни на равенката ги поделиме со  $a \neq 0$ , доаѓаме до равенката

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

која е еквивалентна на неа. Ако од двете страни на дадената равенка го додадеме бројот  $\frac{b^2}{4a^2}$  ја добиваме равенката

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}$$

која е еквивалентна на дадената равенка.

Да забележиме дека првите три члена од левата страна на последната равенката претставуваат полн квадрат од биномот  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ . Според тоа, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Десната страна на последната равенка ја запишеме во облик

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2$$

не претпоставувајќи при тоа изразот  $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$  да биде ненегативен. Применувајќи ја последната релација равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2$$

или, конечно, во облик

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2 = 0. \quad (2)$$

Равенките (1) и (2) се еквивалентни. Корените на последната равенка ги наоѓаме на следниот начин: со помош на формулата за разлика на квадрати, ја разложуваме левата страна на множителите при што ја добиваме равенката

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0.$$

Имајќи во вид дека производ на два множителите е еднаков на нула ако и само ако барем еден од множителите е еднаков на нула добиваме дека

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) = 0.$$

На тој начин равенката (1) односно (2) ја заменивме со две линеарни равенки чишто решенија не е тешко да се определат. Навистина, ако ги означиме нивните корени со  $x_1$  и  $x_2$  соодветно, тогаш од првата равенка добивеме

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

додека од втората добиваме

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Вообичаено последните две формули ги запишуваме во една како

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

На тој начин доаѓаме до формулата за корените на полна квадратна равенка

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

После низа елементарни трансформации дадената формула можеме да ја запишеме во облик:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

Според тоа, корените на квадратна равенка во општ вид се еднакви на дробка, чиј броител е еднаков на вториот коефициент со спротивен знак плус и минус квадратен корен од квадратот на тој коефициент намален за учетворчениот производот на првиот коефициент со слободниот член, а именител еднаков на удвоениот прв коефициент.

Да забележиме дека споменатата постапка за определување на корените на една квадратна равенка воедно покажува дека квадратна равенка има точно два корени.

Притоа, доколку  $b^2 - 4ac < 0$ , ќе запишуваме дека  $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$ . Така на пример,  $\sqrt{-13} = i\sqrt{-(-13)} = i\sqrt{13}$ .

**Задача 1.** Реша ги следниве полни квадратни равенки:

**а)**  $3x^2 - 4x - 15 = 0$       **б)**  $5y^2 - 6y + 3 = 0$       **в)**  $x^2 - 18x + 81 = 0$ .

**Решение.** Со примена на формулата (3) добиваме

**а)**  $x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{2 \pm 7}{3},$

откаде следува дека  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -\frac{5}{3}$ . Да забележиме дека во овој случај поткореновата величина е позитивен број, а корените на равенката се различни реални броеви.

**б)**  $y_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{-24}}{10} = \frac{6 \pm 2i\sqrt{6}}{10} = \frac{3 \pm i\sqrt{6}}{5},$

од каде што следува дека  $y_1 = \frac{3+i\sqrt{6}}{5}$ ,  $y_2 = \frac{3-i\sqrt{6}}{5}$ . Во овој случај поткореновата величина е негативен број, од каде следува дека корените на равенката се конјугирано комплексни броеви.

**в)**  $x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-81} = 9$ , откаде што следува дека  $x_1 = x_2 = 9$ . Да забележиме дека во овој случај поткореновата величина е еднаква на нула. Корените на равенката се реални броеви еднакви меѓу себе. Во тој случај велиме дека равенката има еден двоен корен. ♦

Да забележиме дека при изведување на формулата (3) за решавање на полна квадратна равенка (1) во ниту еден чекор не го искористивме условот  $b \neq 0$  и  $c \neq 0$ . Според тоа можеме да заклучиме дека формулата (3) може да се примени за пресметување на корените на неполна квадратна равенка.

**Задача 2.** Реша ги следниве неполни квадратни равенки:

**а)**  $3x^2 - 4x = 0$       **б)**  $4x^2 - 3 = 0$       **в)**  $2y^2 + 5 = 0$       **г)**  $3x^2 = 0$ .

**Решение.** Со примена на формулата (3) добиваме

**а)**  $x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{4 \pm 4}{6}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{4}{3}$

**б)**  $x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{\pm \sqrt{48}}{8} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{8}$ ,  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**в)**  $y_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm \sqrt{-40}}{4} = \pm i \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,  $y_1 = i \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,  $y_2 = -i \frac{\sqrt{10}}{2}$

**г)**  $x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = 0$ ,  $x_1 = x_2 = 0$ . ♦

**Задача 3.** Реша ја параметарската квадратна равенка

$$abx^2 - (a^2 - b^2)x - ab = 0.$$

**Решение.** Според формулата (3) имаме

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2}}{2ab} = \\ &= \frac{a^2 - b^2 \pm (a^2 + b^2)}{2ab}, \end{aligned}$$

од каде што следува

$$x_1 = \frac{a^2 - b^2 + a^2 + b^2}{2ab} = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a^2 - b^2 - a^2 - b^2}{2ab} = -\frac{b}{a}.$$

## Задачи

Реша ги следниве квадратни равенки:

**1. а)**  $x^2 - 4x - 5 = 0$       **б)**  $x^2 - x - 90 = 0$       **в)**  $x^2 - 2x - 8 = 0$

**г)**  $x^2 + 6x + 4 = 0$       **д)**  $x^2 + 3x - 5 = 0$       **е)**  $x^2 + 6x + 6 = 0$ .

**2. а)**  $x^2 + x + 1 = 0$       **б)**  $x^2 - 8x + 96 = 0$       **в)**  $x^2 - 5x + 22 = 0$

**г)**  $x^2 - 4x + 4 = 0$       **д)**  $x^2 - 2x + 1 = 0$       **е)**  $x^2 - 10x + 25 = 0$ .

3. а)  $5x^2 + 8 = -12x$

б)  $2x^2 + 4x = -3$

в)  $3y^2 = 1 - y$ .

4. а)  $(x+3)^2 = 16$

б)  $(x-8)^2 = 127 - 18x$

в)  $2x(x-2) + 3 = (x+3)^2$

г)  $\frac{x+1}{2} - x(x+1) = \frac{x+2}{3}$

д)  $x(x^2 + 3x) - 2x = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ .

5. а)  $5x^2 - 3x = 0$

б)  $3x^2 + 7x = 0$

в)  $4y^2 + 9 = 0$

г)  $x^2 - 49 = 0$

д)  $x^2 + x = 9x - x^2$

ѓ)  $x(x+2) = 2x+1$ .

6. Реши ги следниве параметарски квадратни равенки:

а)  $6x^2 + 5mx + m^2 = 0$

б)  $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

#### 4.4. Дискусија на решенијата на полна квадратна равенка

Од формулата за пресметување на корените на полна квадратна равенка можеме да заклучиме дека во зависност од коефициентите дадена квадратната равенка има два реални различни корени, еден двоен корен или два конјугирано комплексни корени.

Користејќи ја формулата за пресметување на корени на полна квадратна равенка, корените на равенката

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

можеме да ги запишеме во облик

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad (2)$$

каде што

$$D = b^2 - 4ac. \quad (3)$$

Со следниот пример ќе ја покажеме врската на бројот  $D$  со природата на корените на дадена квадратна равенка.

**Задача 1.** Реши ги следниве квадратни равенки:

а)  $x^2 + 6x - 2 = 0$

б)  $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

в)  $x^2 - 6x + 10 = 0$ .

**Решение.** а) Бројот  $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 36 + 8 = 44$  е позитивен, додека корените на равенката  $x_1 = \frac{-6 + \sqrt{44}}{2} = -3 + \sqrt{11}$  и  $x_2 = \frac{-6 - \sqrt{44}}{2} = -3 - \sqrt{11}$  се реални и различни.

б) Бројот  $D = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48 - 48 = 0$  е еднаков на нула, додека корените на равенката  $x_1 = \frac{-(-4\sqrt{3}) + \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  и  $x_2 = \frac{-(-4\sqrt{3}) - \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  се реални и еднакви.

в) Бројот  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$  е негативен, додека корените на равенката  $x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = 3 + i$  и  $x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = 3 - i$  се конјугирано комплексни броеви. ♦

Бројот  $D$  определен со формулата (3) се нарекува **дискриминанта** на квадратната равенка (1). Како што може да заклучиме од дадениот пример тој ја одредува природата на корените една квадратна равенка, односно ги разграничува трите наведени случаи.

Да ги разгледаме следните три случаи:

Ако  $D > 0$  тогаш од формулата (2) можеме да заклучиме дека корените на квадратната равенка (1) се реални броеви. Уште повеќе заради

$$x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a} \neq 0$$

следува дека  $x_1 \neq x_2$ , односно корените на квадратната равенка се различни. Значи:

**1.** Ако дискриминанта на дадена квадратна равенка е позитивна, тогаш нејзините корени се реални и различни.

Ако  $D = 0$  тогаш од формулата (2) можеме да заклучиме дека корените на квадратната равенка (1) се реални и еднакви, односно

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Во тој случај велиме дека равенката има еден двоен корен. Според тоа:

**2.** Ако дискриминанта на дадена квадратна равенка е еднаква на нула, тогаш равенката има еден двоен корен.

Ако  $D < 0$  тогаш од формулата (2) можеме да заклучиме дека равенката има конјугирано комплексни корени.

Според тоа можеме да заклучиме дека:

**3.** Ако дискриминанта на дадена квадратна равенка е негативна, тогаш таа нема реални корени.

**Задача 2.** Без да се реши секоја од квадратните равенки да се утврди дали таа има реални корени:

**а)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$       **б)**  $x^2 - 3x + 10 = 0$       **в)**  $x^2 - 6x + 9 = 0.$

**Решение. а)** Дискриминантата  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$  е позитивна, од каде што заклучуваме дека корените на равенката се реални и различни.

**б)** Дискриминантата  $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 - 40 = -31$  е негативна од каде што заклучуваме дека равенката нема реални корени.

**в)** Дискриминантата  $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$  е еднаква на нула, што значи равенката има еден двоен корен. ♦

Како што спомнавме во претходното поглавје, формулата за пресметување на корени на полна квадратна равенка може да се примени и кај неполни квадратни равенки. Според тоа има смисла аналогна дискусија на решенијата на неполна квадратна равенка.

Дискриминантата на неполна квадратна равенка од облик  $ax^2 + bx = 0$  изнесува  $D = b^2$ . Според тоа корените на равенка од овој облик се секогаш реални и различни.

Дискриминантата на неполна квадратна равенка од облик  $ax^2 + c = 0$  изнесува  $D = -4ac$ . Во овој случај корените на равенката се реални и различни ако коефициентите  $a$  и  $c$  се со спротивни знаци, додека тие се конјугирано комплексни ако коефициентите  $a$  и  $c$  се со исти знак.

Квадратна равенка од облик  $ax^2 = 0$  има еден двоен корен бидејќи нејзината дискриминанта  $D = 0$ .

**Задача 3.** Пресметај ја вредноста на дискриминантата на следниве квадратни равенки, а потоа најди ги нивните корени.

а)  $x^2 - 5x = 0$       б)  $2x^2 + 3 = 0$       в)  $3x^2 = 0$ .

**Решение.** а) Дискриминантата на квадратната равенка  $D = b^2 = (-5)^2 = 25$  е позитивна, па корените  $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{25}}{2} = 0$  и  $x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{25}}{2} = 5$  се реални и различни.

б) Дискриминантата на дадената квадратна равенка  $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -24$  е негативна. Равенката нема реални корени.

в) Дискриминантата на дадената квадратна равенка  $D = 0$ . Равенката има еден двоен корен  $x_1 = x_2 = 0$ . ♦

**Задача 4.** За кои вредности на реалниот параметар  $m$ , квадратната равенка  $x^2 + mx + 9 = 0$  има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на  $m$  да се определи двојниот корен на добиената равенката.

**Решение.** За дискриминантата имаме  $D = m^2 - 4 \cdot 9 = m^2 - 36$ . Равенката има еден двоен корен ако  $D = 0$ , односно ако  $m^2 - 36 = 0$ . Според тоа за  $m = \pm 6$  дадената равенка има еден двоен корен. За  $m = 6$  решение на равенката е реалниот број  $x = -3$ , и за  $m = -6$  решение на равенката е реалниот број  $x = 3$ . ♦

### Задачи

1. Пресметај ја вредноста на дискриминантата на следниве квадратни равенки:

а)  $x^2 + 6x + 3 = 0$       б)  $x^2 + 8x + 16 = 0$       в)  $x^2 + 6x + 10$   
 г)  $3t^2 - 4t + 2 = 0$       д)  $5x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$       ё)  $\sqrt{5}x^2 - 6x + \sqrt{5} = 0$ .

Без да се реши секоја од квадратните равенки да се определи дали таа има реални корени:

2. а)  $x^2 + 3x - 9 = 0$       б)  $x^2 - 4x - 5 = 0$       в)  $t^2 + 8t + 20 = 0$   
 г)  $3x^2 - 8x - 5 = 0$       д)  $2x^2 - 9x + 3 = 0$       ё)  $5y^2 - 4x + 3 = 0$ .

3. а)  $x^2 + \frac{5}{4} = x$       б)  $\frac{y^2}{4} + 1 = y$       в)  $x^2 + \frac{7}{3}x = 2$   
 г)  $\sqrt{3}x^2 - x - 4\sqrt{3} = 0$       д)  $2x^2 - 5x + \sqrt{8} = 0$       ё)  $7y^2 + 2 = 2\sqrt{14}y$ .

4. а)  $4x^2 - 3x = 0$       б)  $3x^2 + 7x = 0$       в)  $4t^2 + 9 = 0$   
 г)  $x^2 - 4 = 0$       д)  $x^2 + x = 9x - x^2$       ё)  $x(x + 2) = 2x + 1$ .

5. За кои вредности на реалниот параметар  $k$ , равенката

$$(k-1)x^2 + 4x + (k+2) = 0$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на  $k$  да се определи двојниот корен на добиената равенката.

6. За кои вредности на реалниот параметар  $k$ , равенката  $2x^2 + 4x + k = 0$

а) има реални корени      б) нема реални корени?

7. За кои вредности на реалниот параметар  $m$ , корените на квадратната равенка  $3x^2 - 6x - m = 0$  се различни?

#### 4.5. Виетови формули за врската меѓу корените и коефициентите на квадратна равенка

Од формулата за пресметување на корените на полна квадратна равенка можеме да заклучиме дека постои врска помеѓу коефициентите на квадратната равенка и нејзините корени. Имено, корените на квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0$$

можеме да ги изразиме преку коефициентите  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  со помош на формулите

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Сега ќе ја поставиме обратната задача: да ги изразиме коефициентите  $a$ ,  $b$  и  $c$  преку нејзините корени  $x_1$  и  $x_2$ .

**Пример 1.** Ако ја решиме квадратната равенка  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , каде  $a = 1$ ,  $b = -5$  и  $c = 6$ , ќе добиеме дека нејзини корени се  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 2$ . Збирот на корените  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 2$  е еднаков на 5, односно на коефициентот  $b$  со спротивен знак, а производот на  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 2$  е еднаков на слободниот член 6. ♦

Ќе покажеме дека ова својство на квадратната равенка  $x^2 - 5x + 6 = 0$  важи за секоја квадратна равенка.

**Теорема 1. (Теорема на Виет)** Ако  $x_1$  и  $x_2$  се корени на квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ , тогаш  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  и  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

**Доказ.** Знаеме дека корените на квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ , се

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Тогаш за нивниот збир добиваме

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ако ги помножиме корените добиваме

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacksquare \end{aligned}$$

Според тоа, коефициентите  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  на квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ , може да се изразени преку корените  $x_1$  и  $x_2$  со помош на формулите



$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

кои се нарекуваат **Виетови формули**.

Точно е и обратната теорема на теоремата на Виет.

**Теорема 2. (Обратна теорема на Виет)** Ако броевите  $x_1$  и  $x_2$  ги задоволуваат равенствата  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  и  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , тогаш  $x_1$  и  $x_2$  се корени на квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Доказ.** Бидејќи  $a \neq 0$ , квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ , е еквивалентна со равенката  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . Ако  $\frac{b}{a}$  и  $\frac{c}{a}$  ги замениме со  $-(x_1 + x_2)$  и  $x_1 \cdot x_2$ , соодветно, ја добиваме равенката  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ . Ако во така добиената квадратна равенка, непознатата ја замениме последователно со  $x_1$ , а потоа со  $x_2$ , добиваме:

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_2 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

$$x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = x_2^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

од каде што заклучуваме дека  $x_1$  и  $x_2$  се токму корените на квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$ . ■

### Задачи

1. Пресметај го збирот и производот на корените на следниве квадратни равенки:

а)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

б)  $x^2 + 2x - 1 = 0$

в)  $x^2 - 37x + 27 = 0$

г)  $x^2 - 15 = 0$

д)  $-x^2 + 7x - 3 = 0$

ѓ)  $ax^2 - (a^2 + 9)x - 9 = 0$ .

2. Дадениот број е корен на квадратната равенка. Најди го другиот корен на равенката.

а)  $x^2 + 7x - 18 = 0$ ,  $x_1 = 2$

б)  $x^2 + 28x - 93 = 0$ ,  $x_1 = 3$

в)  $6x^2 + 37x - 13 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{3}$

г)  $6x^2 + 19x - 7 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{3}$ .

## 4.6. Примена на Виетовите формули

Со примена на Виетовите формули можеме да провериме дали дадени броеви се корена на една квадратна равенка.

**Задача 1.** Провери дали броевите  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$  се корени на квадратната равенка  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

**Решение.** Во дадената квадратна равенка  $a = 1$ ,  $b = -3$  и  $c = 2$ . Освен тоа,  $x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$  и  $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 1 = 2$ . Од друга страна,  $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$  и  $\frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ . Бидејќи  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  и  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , заради Теорема 2, броевите  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$  се корени на квадратната равенка  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . ♦

Врската помеѓу коефициентите и корените на квадратната равенка ни овозможува да составиме квадратната равенка, ако ги знаеме нејзините корени.

**Задача 2.** Состави квадратна равенка со корени  $x_1 = 6$  и  $x_2 = -1$ .

**Решение.** Претпоставуваме дека бараната квадратна равенка е од облик  $ax^2 + bx + c = 0$ . Тогаш таа е еквивалентна со равенката  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . Од условот на задачата имаме дека  $x_1 + x_2 = 6 + (-1) = 5$  и  $x_1 \cdot x_2 = 6 \cdot (-1) = -6$ . Заради Виетовите формули  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  и  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , имаме  $-\frac{b}{a} = 5$  и  $\frac{c}{a} = -6$ , односно  $\frac{b}{a} = -5$  и  $\frac{c}{a} = -6$ . Според тоа бараната равенка гласи  $x^2 - 5x - 6 = 0$ . ♦

**Задача 3.** Состави квадратна равенка чии корени се двапати поголеми од корените на квадратната равенка  $2x^2 + 71x + 25 = 0$ .

**Решение.** Нека  $y^2 + py + q = 0$  е бараната равенка. Од условот во задачата  $y_1 = 2x_1$ ,  $y_2 = 2x_2$ . Тогаш имаме дека

$$p = -(y_1 + y_2) = -(2x_1 + 2x_2) = -2(x_1 + x_2) = -2\left(-\frac{71}{2}\right) = 71, \text{ и}$$

$$q = y_1 y_2 = 2x_1 2x_2 = 4x_1 x_2 = 4 \cdot \frac{25}{2} = 50.$$

Бараната равенка е  $y^2 + 71y + 50 = 0$ . ♦

**Задача 4.** Состави квадратна равенка чии корени се еднакви на квадратите на корените на квадратната равенка  $x^2 - 2x - 5 = 0$ .

**Решение.** Нека  $y^2 + py + q = 0$  е бараната равенка. Тогаш добиваме

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -(2^2 + 2 \cdot 5) = -14,$$

$$q = y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = (-5)^2 = 25.$$

Бараната квадратна равенка е  $y^2 - 14y + 25 = 0$ . ♦

Со примена на Виетовите формули може да се разложи квадратен трином на линеарни множители. Имено квадратниот трином може да го запишеме во облик

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Со примена на Виетовите формули на квадратната равенка  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  добиваме дека

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Конечно, добиваме дека

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

**Задача 5.** Разложи го на линеарни множители триномот  $2x^2 - 10x - 12$ .

**Решение.** Со помош на формулата за решавање на квадратна равенка наоѓаме дека квадратната равенка  $2x^2 - 10x - 12 = 0$  има корени  $x_1 = 6$  и  $x_2 = -1$ . Од погорната формула го добиваме разложувањето

$$2x^2 - 10x - 12 = 2(x - 6)(x + 1). \quad \spadesuit$$

**Задача 6.** За кои вредности на реалниот параметар  $m$  корените на квадратната равенка  $x^2 + 3x + m = 0$  го задоволуваат равенството  $3x_1 - x_2 = 4$ ?

**Решение.** Заради Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = m.$$

Првата Виетова формула заедно со условот на задачата  $3x_1 - x_2 = 4$ , определува систем од две линеарни равенки по непознатите  $x_1$  и  $x_2$ ,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases},$$

чие решение е  $x_1 = \frac{1}{4}$  и  $x_2 = -\frac{13}{4}$ . Заменувајќи ги добиените вредности за  $x_1$  и  $x_2$  во втората Виетова формула добиваме  $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) = m$ , од каде што следува дека  $m = -\frac{13}{16}$ . ♦

**Задача 7.** Збирот на два броја е  $\frac{5}{6}$ , додека нивниот производ е  $\frac{1}{9}$ . Кои се тие броеви?

**Решение.** Од обратната теорема на Виет следува дека бараните броеви  $x_1$  и  $x_2$  се корени на равенката  $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{9} = 0$  или  $18x^2 - 5x + 2 = 0$ . Според тоа, имаме дека  $x_1 = \frac{2}{3}$  и  $x_2 = \frac{1}{6}$ . ♦

### Задачи

1. Провери дали дадените броевите се корени на квадратната равенка:

**а)**  $x^2 - 8x + 15 = 0$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$       **б)**  $x^2 + 2x - 5 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$

**в)**  $x^2 - 4x + 1 = 0$ ,  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$       **г)**  $x^2 - 27x + 140 = 0$ ,  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = -20$ .

2. Состави квадратна равенка чии корени се:

**а)**  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -7$       **б)**  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -5$       **в)**  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = -4$

**г)**  $x_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{2}{5}$       **д)**  $x_1 = 2\sqrt{3}$ ,  $x_2 = -5\sqrt{3}$       **е)**  $x_1 = 3 - \sqrt{5}$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ .

3. Без да се реши равенката определи ги нејзините корени:

**а)**  $x^2 - 9x + 20 = 0$       **б)**  $6x^2 - 17x + 10 = 0$       **в)**  $x^2 + 11x - 12 = 0$

**г)**  $x^2 + 2x - 15 = 0$       **д)**  $x^2 - (2p + 1)x + 2p = 0$       **е)**  $x^2 + (3a - 1)x - 3a = 0$ .

4. Без да се реши равенката да се определат нејзините корени:

**а)**  $x^2 - 6x + 5 = 0$       **б)**  $x^2 + 4x - 1 = 0$

**в)**  $4x^2 - 4x - 5 = 0$       **г)**  $x^2 + 12x - 11 = 0$ .

5. Разложи ги на линеарни множители триномите:

а)  $x^2 + x - 2$

б)  $3x^2 - 9x - 12$

в)  $2x^2 - 72$ .

6. Нека  $x_1$  и  $x_2$  се корени на равенката  $mx^2 - (2m-1)x + m^2 = 0$ . Без да се реши равенката да се определи вредноста на реалниот параметар  $m$ , така што  $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$ .

7. Состави квадратна равенка чии корени се реципрочни на корените на квадратната равенка  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

8. Збирот на два броја е  $-2$ , додека нивниот производ е  $-\frac{1}{2}$ . Кои се тие броеви?

#### 4.7. Примена на квадратна равенка

Квадратните равенки имаат голема примена во математиката, физиката, хемијата и во другите науки. Многу практични проблеми се решаваат со помош на квадратна равенка, составувајќи математички модел според зададените услови. При тоа е важно добиените решенија на равенката да се доведат во врска со природата на поставениот проблем, односно да се провери дали добиениот резултат е решение на поставениот проблем.

Постапката за решавање на проблеми со помош на математички апарат ги содржи вообичаено следниве чекори.

**Чекор 1.** Определување на познатите и непознатите величини, како и определување на множеството допуштени вредности за непознатите величини;

**Чекор 2.** Според условите во задачата се изразува врска меѓу величините, односно се составуваат равенки и неравенки;

**Чекор 3.** Решавање на добиените равенки и неравенки;

**Чекор 4.** Толкување на добиените резултати во согласност со условите од задачата;

**Чекор 5.** Проверка на резултатот.

**Задача 1.** Производот на два последователни непарни природни броеви е еднаков на 195. Кои се тие броеви?

**Решение. Чекор 1.** Да го означиме со  $x$  помалиот од двата барани броја. Тогаш поголемиот од броевите има облик  $x + 2$ .

**Чекор 2.** Согласно со условот во задачата  $x$  е непарен природен број и  $x(x + 2) = 195$ . Бараниот број е решение на квадратната равенка

$$x^2 + 2x - 195 = 0.$$

**Чекор 3.** Корени на добиената квадратна равенка се  $x_1 = 13$  и  $x_2 = -15$ .

**Чекор 4.** Решението  $x_2 = -15$  го елиминираме бидејќи  $-15$  не е природен број. Според тоа помалиот од двата барани број е бројот  $13$ . Тогаш поголемиот број е  $13 + 2 = 15$ .

**Чекор 5.** Проверка:  $13$  и  $15$  се последователни непарни природни броеви и  $13 \cdot 15 = 195$ . ♦

**Задача 2.** Правоаголна градина е  $5$  метри широка и  $7$  метри долга. Ако ширината и должината на градината се зголемат за една иста вредност тогаш плоштината на

градината ќе се зголеми за 28 квадратни метри. За колку се зголемени должината и ширината на градината?

**Решение. Чекор 1.** Нека ширината и должината на градината се зголемени за  $x$  метри (цртеж 1).

**Чекор 2.** Новите димензии на градината се  $5+x$  и  $7+x$ . Тогаш новата плоштина ќе изнесува  $(5+x)(7+x)$ . Од условот на задачата добиваме дека  $(5+x)(7+x) = 35 + 28$ . Според тоа ја добиваме квадратната равенка

$$(5+x)(7+x) = 35 + 28 = 63,$$

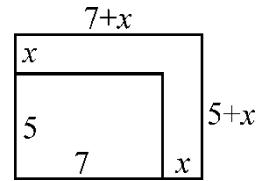
односно

$$x^2 + 12x - 28 = 0.$$

**Чекор 3.** Корени на добиената квадратна равенка се  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -14$ .

**Чекор 4.** Бидејќи зголемувањето на должина е позитивна величина заклучуваме дека само 2 е решение на поставениот проблем, односно ширината и должината на градината се зголемиле по 2 метри.

**Чекор 5.** Проверка: Новата ширина на градината изнесува  $5 + 2 = 7$  метри, а новата должина  $7 + 2 = 9$  метри. Плоштината на дадената градина изнесувала  $5 \cdot 7 = 35$  квадратни метри, додека плоштината на новата градина ќе изнесува  $7 \cdot 9 = 63$  квадратни метри. Зголемувањето на плоштината изнесува  $63 - 35 = 28$  квадратни метри. ♦



Цртеж 1

**Задача 3.** Ана вложила во банка 4000 денари во времетраење од една година со определена годишна каматна стапка. На почетокот на втората година, при истата годишна каматна стапка, Ана ја вложила истата сума пари и добиената камата од првата година. Да се определи годишната каматна стапка, ако вкупната сума пари со која располагала Ана на крајот од втората година изнесувала 4410 денари.

**Решение. Чекор 1.** Да ја означиме со  $x$  годишната каматна стапка на банката.

**Чекор 2.** На крајот од првата година Ана имала

$$4000 + \frac{x}{100} \cdot 4000 = 4000 + 40x \text{ денари.}$$

На крајот од втората година Ана имала

$$(4000 + 40x) + \frac{x}{100} (4000 + 40x) = \frac{2}{5} x^2 + 80x + 4000 \text{ денари.}$$

**Чекор 3.** Од условите во задачата ја добиваме квадратната равенка

$$\frac{2}{5} x^2 + 80x + 4000 = 4410,$$

односно равенката

$$x^2 + 200x - 1025 = 0.$$

**Чекор 4.** Решенија на добиената квадратна равенка се  $x_1 = 5$  и  $x_2 = -205$ . Бидејќи каматната стапка е позитивна величина, второто решение не е решение на поставениот проблем. Според тоа годишната каматна стапка на банката изнесува 5%.

**Чекор 5.** Проверка: На крајот од првата година Ана имала вкупно

$$4000 + \frac{5}{100} \cdot 4000 = 4000 + 40 \cdot 5 = 4200 \text{ денари}$$

додека на крајот од втората година имала

$$(4000 + 40 \cdot 5) + \frac{5}{100} (4000 + 40 \cdot 5) = \frac{2}{5} 5^2 + 80 \cdot 5 + 4000 = 4410 \text{ денари.} \quad \blacklozenge$$

**Задача 4.** Тело е фрлено од површината на земјата со почетна брзина од  $v_0 = 140 \frac{m}{s}$ . Пресметај после колку секунди телото ќе се најде на растојание од земјата од

- а)  $480m$       б)  $1200m$       в)  $980m$       г)  $0m$

ако земјиното забрзување е  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

**Решение.** Од физиката е познато дека тело фрлено вертикално нагоре со почетна брзина  $v_0$ , по изминато време  $t$  се наоѓа на височина  $h$ , определена со формулата  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ . За  $g = 10$ ,  $v_0 = 140$ , ја добиваме квадратната равенка

$$h = 140t - 5t^2.$$

- а) За  $h = 480$ , ја добиваме равенката  $480 = 140t - 5t^2$ , односно равенката

$$t^2 - 28t + 96 = 0$$

чиито корени се  $t_1 = 4$  и  $t_2 = 24$ . Според тоа телото се наоѓа на височина од  $480m$  во 4-тата секунда (при издигање нагоре) и во 24-тата секунда (при паѓање надолу).

- б) За  $h = 1200$ , ја добиваме равенката  $1200 = 140t - 5t^2$ , односно равенката

$$t^2 - 28t + 240 = 0$$

која што нема реални корени. Според тоа телото во ниту еден момент не достигнува височина од  $1200m$ .

- в) За  $h = 980$ , ја добиваме равенката  $980 = 140t - 5t^2$ , односно равенката

$$t^2 - 28t + 196 = 0$$

којашто има двоен корен  $t_1 = t_2 = 14$ . Според тоа телото се наоѓа на височина од  $980m$  во 14-тата секунда. Да забележиме дека тоа е најголемата височина што ја достигнува телото.

- г) За  $h = 0$ , ја добиваме равенката  $0 = 140t - 5t^2$ , односно равенката

$$t^2 - 28t = 0$$

чиито корени се  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 28$ . Според тоа телото се наоѓа на површината на земјата во почетниот момент и во 28-тата секунда по фрлањето нагоре.

Да забележиме дека времето за издигање на телото до највисоката положба изнесува 14 секунди, исто толку колку што е потребно за неговото паѓање на земјата. ♦

**Задача 5.** Да се определат страните на правоаголник со дадена плоштина  $S$ , така што неговиот периметар да биде најмал.

**Решение.** Да го означиме со  $2p$  периметарот на бараниот правоаголник, а со  $x$  една негова страна. Бидејќи другата страна на правоаголникот изнесува  $y = \frac{S}{x}$ , за

неговиот периметар ја добиваме равенката  $2p = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$ , откаде

$$x^2 - px + S = 0.$$

1. Ако  $D = p^2 - 4S > 0$ , односно  $p > 4S$ , тогаш равенката  $x^2 - px + S = 0$  има два различни позитивни корени  $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4S}}{2}$ . Според тоа во овој случај добиваме два правоаголника со страни

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4S}}{2}, \quad y_1 = \frac{S}{x_1} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4S}}{2}, \quad y_2 = \frac{S}{x_2}.$$

2. Ако  $D = 0$ , односно  $p = 2\sqrt{S}$ , тогаш равенката има двоен позитивен корен  $x_1 = x_2 = \sqrt{S}$ . Во овој случај добиваме квадрат со страна  $x = y = \sqrt{S}$ .

3. Ако  $D < 0$ , односно  $p < 2\sqrt{S}$ , тогаш равенката нема реални корени. Во овој случај не постои правоаголник со периметар  $2p < 4\sqrt{S}$ .

Бидејќи при услов  $2p < 4\sqrt{S}$  правоаголникот не постои, а при услов  $2p > 4\sqrt{S}$  постои, можеме да заклучиме дека најмалата вредност на периметарот  $2p$  изнесува  $4\sqrt{S}$ . Според тоа правоаголник со плоштина  $S$  и најмал периметар е квадрат со страна  $\sqrt{S}$ . ♦

### Задачи

1. Збирот на два последователни природни броеви е за 131 помал од нивниот производ. Кои се тие броеви?

2. Збирот од квадратите на три последователни природни броеви е еднаков на збирот од квадратите на следните два последователни природни броеви. Кои се тие броеви?

3. Пресметај го периметарот на правоаголник со плоштина од  $60\text{cm}^2$ , ако едната страна му е за  $4\text{cm}$  поголема од другата.

4. Еден двор има форма на правоаголник со плоштина од  $500\text{m}^2$ . Колку метри жица се потребни за негово заградување ако едната страна на дворот е за  $5\text{m}$  пократка од другата, а за влезни врати треба да се остават  $5\text{m}$ ?

5. На еден шаховски турнир се одиграни 45 партии, на тој начин што секој од учесниците играл со останатите по една партија. Колку шахисти учествувале на турнирот?

6. Цената на чинење на еден електричен уред изнесувала 25 евра. По двократно намаление неговата цена изнесувала 18 евра. За колку проценти е намалена цената на електричниот уред првиот, односно вториот пат, ако процентот на второто намаление е два пати поголемо од процентот на првото намаление?

7. Шестмесечен орочен депозит од 500 евра се зголемил во период од еден година на 583,2 евра. Колку изнесува каматната стапка за период од шест месеци?

8. Тело е фрлено нагоре со почетна брзина од  $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

a) За колку секунди телото ќе биде на височина од  $60\text{m}$ ?

б) За колку секунди телото ќе падна на земјата?

## 4.8. Дробно рационални равенки

Како што знаеме равенка која содржи само полиномни функции се вика **алгебарска равенка**, додека равенка која содржи дробно рационална функција се вика **дробно рационална равенка**. Ќе претпоставуваме дека непознатата прима вредности во множеството реални броеви.

**Пример 1.** Равенката  $2x + 5 = x(x - 3)$  е алгебарска равенка, додека равенките  $x - \frac{5}{x} = -3x + 10$  и  $\frac{x-4}{2x-1} = \frac{x-9}{x^2}$  се дробно рационални равенки. ♦

Во продолжение ќе проучуваме дробно рационални равенки со една непозната чие решавање се сведува на решавање на линеарна или квадратна равенка.

**Задача 2.** Реша ја равенката  $\frac{12}{x} - \frac{9-x}{x-3} = 1$ .

**Решение. Чекор 1.** Најнапред да го определиме дефиниционото множество на дадената равенка, односно да ги определиме сите вредности на непознатата за кои равенката има смисла. Бидејќи именителите на дропките во равенката се анулираат за  $x = 0$  и  $x = 3$ , заклучуваме дека дефиниционото множество на дадената равенка го сочинуваат сите реални броеви  $x \neq 0$  и  $x \neq 3$ .

**Чекор 2.** Бараме најмал заеднички содржател (НЗС) од именителите на дропките кои се појавуваат во равенката. Во случајот НЗС од именителите на дропките во дадената равенка е  $x(x-3)$ .

$$\frac{\overset{x-3}{12}}{\underset{x}{x}} - \frac{\overset{x}{9-x}}{\underset{x(x-3)}{x-3}} = \overset{x(x-3)}{1}.$$

**Чекор 3.** Двете страни на дадената равенка ги множиме со така определениот НЗС од именителите на дропките, односно дадената равенка се ослободува од именителите со што таа преминува во алгебарска равенка. Во нашиот случај ја добиваме равенката

$$12(x-3) - x(9-x) = x(x-3).$$

**Чекор 4.** Ја решаваме добиената алгебарска равенка, која е еквивалентна на дадената за сите вредности на  $x$  од дефиниционото множество. Равенката  $12(x-3) - x(9-x) = x(x-3)$  е еквивалентна на равенката  $6x = 36$ , односно на равенката  $x = 6$ .

Бидејќи при  $x = 6$  важи  $x(x-3) \neq 0$  заклучуваме дека дадената дробно рационална равенка и добиената равенка  $x = 6$  се еквивалентни. Конечно, добиваме дека решение на дадената равенка е  $x = 6$ . ♦

**Задача 3.** Реша ја равенката  $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$ .

**Решение. Чекор 1.** Бидејќи именителите на дропките во равенката се анулираат за  $x = 1$  и  $x = -1$ , заклучуваме дека дефиниционото множество на дадената равенка го сочинуваат сите реални броеви  $x \neq 1$  и  $x \neq -1$ .

**Чекор 2.** Бараме најмал заеднички содржател (НЗС) од именителите на дропките кои се појавуваат во равенката. За таа цел го разложуваме квадратниот трином  $x^2 - 1$  на линеарни множители  $(x-1)(x+1)$ . Тогаш НЗС од именителите на дропките во дадената равенка е  $(x-1)(x+1)$ .



$$\underbrace{\frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{1}}_{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}.$$

**Чекор 3.** Дадената равенка се ослободува од именителите со што таа преминува во алгебарската равенка

$$x^2 - x - x^2 + 1 = x + 1 + 2.$$

**Чекор 4.** Ја решаваме добиената алгебарска равенка, која е еквивалентна на дадената за сите вредности на  $x$  од дефиниционото множество. Равенката  $x^2 - x - x^2 + 1 = x + 1 + 2$  е еквивалентна на равенката  $-2x = 2$ , односно на равенката  $x = -1$ .

Добиената вредност за  $x$ ,  $x = -1$ , не е во дефиниционото множество на дадената дробно рационална равенка. Според тоа,  $x = -1$  е корен на алгебарската равенка  $x^2 - x - x^2 + 1 = x + 1 + 2$ , но не е корен на дадената дробно рационална равенка. Значи дадената дробно рационална равенка нема решение. ♦

**Задача 4.** Да се реши равенката  $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{x+3} = \frac{-x}{x^2+2x-3}$ .

**Решение. Чекор 1.** Ако именителите на дробките во равенката ги разложиме на линеарни множители

$$x^2 - x = x(x-1), \quad x^2 + 2x + 3 = (x-1)(x+3)$$

добимаме дека дефиниционото множество на дадената равенка го сочинуваат сите реални броеви  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$  и  $x \neq -3$ .

**Чекор 2.** НЗС од именителите на дробките кои се појавуваат во равенката е  $x(x-1)(x+3)$

$$\underbrace{\frac{x+3}{x^2-x} - \frac{1}{x+3}}_{x(x-1)(x+3)} = \frac{-x}{x^2+2x-3}.$$

**Чекор 3.** Дадената равенка се ослободува од именителите со што таа преминува во алгебарската равенка

$$(x+1)(x+3) - x(x-1) = -x^2,$$

која е еквивалентна на квадратната равенка

$$x^2 + 5x + 3 = 0.$$

**Чекор 4.** Последната равенка има два корени

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2},$$

кои се корени и на дадената дробно рационална равенка, бидејќи ги исполнуваат условите  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$  и  $x \neq -3$ . ♦

**Задача 5.** Реша ја равенката  $\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$ .

**Решение. Чекор 1.** Бидејќи именителите на дробките во равенката се анулираат за  $x = 1$  и  $x = -1$ , заклучуваме дека дефиниционото множество на дадената равенка го сочинуваат сите реални броеви  $x \neq 1$  и  $x \neq -1$ .

**Чекор 2.** НЗС од именителите на дробките кои се појавуваат во равенката е  $(x-1)(x+1)$

$$\frac{6}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

$(x-1)(x+1)$

**Чекор 3.** Дадената равенка се ослободува од именителите со што таа преминува во алгебарската равенка

$$6 + 3(x-1) = (x+1)^2,$$

која е еквивалентна на квадратната равенка

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

**Чекор 4.** Последната равенка има два корени  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -1$ . При тоа коренот  $x_1 = 2$  е корен на дадената дробно рационална равенка, бидејќи ги исполнуваат условите  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ . Вториот корен  $x_2 = -1$  не е корен на дробно рационална равенка, бидејќи не ги исполнуваат условите  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ , односно не е припаѓа на дефиниционото множество на дробно рационалната равенка. ♦

Ако на самиот почеток при решавањето на една дробно рационална равенка не сме го утврдиле дефиниционото множество на непознатата, тогаш по добивањето на решенијата на алгебарската равенка треба да провериме дали секое решение на алгебарската равенка е решение на дадената дробно рационална равенка. Овој заклучок произлегува од фактот дека при ослободување на дробно рационалната равенка од именител (кој ја содржи непознатата) ги множиме со НЗС сите изрази во равенката. Со тоа добиваме алгебарска равенка чие дефиниционо множество е пошироко од дефиниционото множество на дадената дробно рационална равенка бидејќи не ја запазуваме теоремата за еквивалентност на равенки, која претпоставува ненулти множител. Заради тоа добиената алгебарска равенка и дадената дробно рационална равенка не секогаш се еквивалентни.

**Пример 6.** Дробно рационалната равенката  $\frac{1}{x-3} + 4 = \frac{4-x}{x-3}$  нема смисла за  $x = 3$ ,

додека алгебарската равенка  $1 + 4(x-3) = 4 - x$ , која се добива со ослободување на дадената дробно рационална равенка од именител, има смисла за секој реален број  $x$ . Според тоа двете равенки не се еквивалентни. ♦

Досега решените примери и направената дискусија покажуваат дека за да се реши една дробно рационална равенка треба да ги реализираме следниве чекори:

**Чекор 1.** Да го определиме дефиниционото множество на дадената равенка, односно да ги определиме сите вредности на непознатата за кои равенката има смисла.

**Чекор 2.** Да се определи најмал заеднички содржател (НЗС) од именителите на сите дробни изрази во равенката.

**Чекор 3.** Да ја ослободиме равенката од именител.

**Чекор 4.** Да ја решиме добиената алгебарска равенка, која е еквивалентна на дадената за сите вредности на  $x$  од дефиниционото множество.

Во продолжение ќе решиме параметарска дробно рационална равенка.

**Задача 7.** Реша ја параметарската дробно рационална равенка

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b},$$

каде што  $a$  и  $b$  се ненулти реални параметри.

**Решение.** Дадената равенка има смисла за секој реален број  $x \neq 0$ .

НЗС од именителите на дробките кои се појавуваат во равенката е  $abx(x+a+b)$

$$\frac{\frac{ab(x+a+b)}{1}}{x} + \frac{\frac{bx(x+a+b)}{1}}{a} + \frac{\frac{ax(x+a+b)}{1}}{b} = \frac{\frac{abx}{1}}{x+a+b}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{abx(x+a+b)}$

Дадената равенка се ослободува од именител со што таа преминува во алгебарската равенка

$$ab(x+a+b) + bx(x+a+b) + ax(x+a+b) = abx,$$

која е еквивалентна на квадратната равенка

$$(a+b)x^2 + (a+b)^2x + ab(a+b) = 0.$$

Ако  $a+b=0$ , тогаш секој реален број  $x \neq 0$  е решение на квадратната равенка.

Ако  $a+b \neq 0$ , тогаш последната равенка е еквивалентна со равенката

$$x^2 + (a+b)x + ab = 0,$$

чии корени се  $x_1 = -a$  и  $x_2 = -b$ .

Според тоа можеме да заклучиме дека, ако  $a+b=0$ , тогаш секој реален број  $x \neq 0$  е корен на дробно рационалната равенка, додека ако  $a+b \neq 0$ , тогаш таа има два реални корени  $x_1 = -a$  и  $x_2 = -b$ . ♦

### Задачи

1. Определи го дефиниционото множество на следните равенки:

а)  $\frac{3}{4x-5} = 4 - \frac{1}{x-2}$       б)  $\frac{x+3}{2} + \frac{1}{(x-5)(x+1)} = 7.$

2. За кои вредности на  $x$  е точно тврдењето:

а)  $\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 15(x-1) - x(7-x) = x(x-1)$   
 б)  $\frac{x+5}{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x+5=0.$

3. За кои вредности на  $x$  се еднакви дадените изрази:

а)  $\frac{1}{x-3}$  и  $\frac{1}{x+3}$       б)  $\frac{x^2-9}{x}$  и  $\frac{3x+1}{3}$       в)  $\frac{x+8}{x}$  и  $1 + \frac{8}{x}$ ?

4. За кои вредности на  $x$  бројната вредност на изразот  $\frac{9x-7}{3x-2}$  е за еден поголема од бројната вредност на изразот  $\frac{4x-5}{2x-3}$ ?

5. Определи го множеството решенија на следните дробно рационални равенки:

а)  $\frac{1}{x} = \frac{x}{3}$       б)  $\frac{x}{x+1} = x+2$       в)  $\frac{-3x+4}{1-x} = \frac{x+2}{x}$   
 г)  $\frac{x}{x+2} + \frac{8}{4-x^2} = \frac{3}{2-x}$       д)  $\frac{4}{9y^2-1} + \frac{5y}{3y-1} = \frac{4}{3y+1}$   
 е)  $\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0.$

6. Реши ги следниве дробно рационални равенки:

а)  $\frac{x}{x^2+2x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{-x}{x-1}$

б)  $\frac{x+3}{2x-1} - \frac{x}{x+2} - \frac{x^2}{2x^2+3x-2} = 1$

в)  $\frac{x}{x^2-6x-7} + \frac{1}{x-7} = \frac{3x+1}{x^2+x}$

г)  $\frac{x+1}{x^2+8x-7} = 1.$

7. Реши ја параметарската дробно рационална равенка

$$\frac{ax+b}{x-a} = \frac{x-b}{x+a}$$

каде што  $a$  и  $b$  се ненулти реални параметри.

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Определи го боројот на непознатите и степенот на следните равенки:

а)  $-\frac{1}{2}x + 2 = 1$

б)  $(x^2 - 7)^2 = 4x - 1$

в)  $xy + 12x = y.$

2. Трансформирај ги во нормален вид следниве квадратни равенки:

а)  $4x^2 + 7x - 1 = 0$

б)  $-x^2 - 2x = 5$

в)  $\frac{1}{2}x^2 = \frac{x+1}{3}.$

3. Реши ги следниве квадратни равенки:

а)  $x^2 - 2x = 0$

б)  $4x^2 + x = x(2x - 1)$

в)  $ax^2 - bx = x^2.$

4. Најди ги корените на следниве квадратни равенки:

а)  $3x^2 + 2 = 0$

б)  $\left(3x + \frac{3}{2}\right)\left(3x - \frac{3}{2}\right) = 54$

в)  $x^2 - a^2 = b^2 - 2ab.$

5. Реши ги следниве квадратни равенки:

а)  $x^2 - x - 42 = 0$

б)  $y^2 + 2y - 143 = 0$

в)  $x^2 - 18x + 81 = 0$

г)  $(x-2)^2 + (x+3)^2 = 3x^2 - 22$

д)  $x^2 + 8ax - 20a^2 = 0.$

6. Определи го параметарот  $a$  така што равенката  $x^2 - (a+2)x + a = 0$  има:

а) различни реални корени

б) конјугирано комплексни корени.

7. Без да ги наоѓаш корените  $x_1$  и  $x_2$  на равенката  $4x^2 - 3x - 2 = 0$ , пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

б)  $x_1^2 + x_2^2$

в)  $x_1^3 + x_2^3.$

8. Скрати ја дробката:

а)  $\frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 9}$

б)  $\frac{x^2 - 5x - 14}{-x^2 + 2x + 35}$

в)  $\frac{7a^2 + 12a - 4}{3a^2 + 5a - 2}$ .

9. За која вредност на параметарот  $p$  равенката  $(p-1)x^2 + x + 2 = 0$ :

а) е квадратна

б) е линеарна

в) има двократен корен

г) има два реални различни корени

10. Марија е четири години постара од Ана и производот на нивните години е три пати поголем од производот на нивните години пред четири години. Колку години има секоја од нив?

11. Правоаголна градина,  $4m$  широка и  $6m$  долга, е заобиколена со пат со иста ширина. Најди ја ширината на патот ако плоштината на патот е еднаква на плоштината на градината.

12. Реши ги следниве дробно рационални равенки:

а)  $\frac{1+x}{x-1} - \frac{x-1}{1+x} = \frac{12}{1-x^2}$

б)  $\frac{x+1}{x^2+8x+7} = 1$ .

## 5. РАВЕНКИ ОД КВАДРАТЕН ВИД, ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ. СИСТЕМ ОД ЕДНА КВАДРАТНА И ЕДНА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

### 5.1. Биквадратни равенки

Равенка од видот

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

каде што  $a, b$  и  $c$  се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата  $x$ , се вика **биквадратна равенка**.

**Пример 1.** Равенките  $2x^4 - 7x^2 + 20 = 0$ ,  $\frac{x^4}{2} + 3x^2 + 20 = 0$ ,  $x^4 + \sqrt{3}x^2 = 0$ ,  $5x^4 = \frac{2}{3}$  и  $3x^4 = 0$ , се примери на биквадратни равенки. ♦

Да забележиме дека во биквадратната равенка, непознатата  $x$  се појавува само на парен степен. Со воведување на смената

$$x^2 = y$$

равенката (1) се трансформира во квадратна равенка по непознатата  $y$ , односно во равенката

$$ay^2 + by + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (2)$$

• Ако дискриминантата на равенката (2),  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ , тогаш таа има два реални корени  $y_1$  и  $y_2$ . По определувањето на корените на равенката (1) се враќаме на воведената смена, односно ги решаваме квадратните равенки

$$x^2 = y_1 \text{ и } x^2 = y_2.$$

Сите реални корени на последните две равенки, се корени на биквадратната равенка (1). Ако ниту една од нив нема реални корени, тогаш и биквадратната равенка нема реални корени.

• Ако дискриминантата на равенката (2),  $D = b^2 - 4ac < 0$ , тогаш таа нема реални корени, па според тоа и биквадратната равенка нема реални корени.

Од направената дискусија не е тешко да се заклучи дека решавањето на биквадратна равенка може да се сведе на решавање на квадратна равенка.

**Задачи 2.** Решај биквадратната равенка  $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ .

**Решение.** Со воведување на смената

$$x^2 = y$$

ја добиваме квадратната равенка

$$y^2 - 34y + 225 = 0.$$

Со примена на формулата за пресметување на корените на квадратна равенка, добиваме

$$y_{1,2} = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1} = 17 \pm \sqrt{64} = 17 \pm 8,$$

односно  $y_1 = 25$  и  $y_2 = 9$ . Ако се вратиме на воведената смена, односно ако ги решиме

равенките

$$x^2 = 25 \text{ и } x^2 = 9$$

добиваме дека биквадратната равенка има четири реални корени

$$x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 3 \text{ и } x_4 = -3.$$

Да забележиме дека добиените корени се попарно симетрични во однос нулата на реалната оска ( $\pm 5$  и  $\pm 3$ ). ♦

**Задача 3.** Реши ја биквадратната равенка  $x^4 + x^2 - 20 = 0$ .

**Решение.** Со воведување на смената  $x^2 = y$  ја добиваме квадратната равенка

$$y^2 + y + 20 = 0$$

чиј корени се

$$y_1 = 4 \text{ и } y_2 = -5.$$

Во тој случај од двете равенки

$$x^2 = 4 \text{ и } x^2 = -5$$

реални решенија има само првата равенка и тие се

$$x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Според тоа, дадената биквадратна равенка има два реални корени

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2. \blacklozenge$$

**Задача 4.** Реши ја биквадратната равенка  $x^4 - 7x^2 = 0$ .

**Решение.** Со воведување на смената

$$x^2 = y$$

ја добиваме квадратната равенка

$$y^2 - 7y = 0$$

чиј корени се

$$y_1 = 0 \text{ и } y_2 = 7.$$

Решавајќи ги равенките

$$x^2 = 0 \text{ и } x^2 = 7$$

добиваме дека биквадратната равенка има четири реални корени од кои еден двоен корен

$$x_{1,2} = 0, \text{ и два различни } x_3 = 7 \text{ и } x_4 = -7. \blacklozenge$$

**Задача 5.** Реши ја биквадратната равенка  $5x^4 + 3x^2 = 0$ .

**Решение.** Со воведување на смената

$$x^2 = y$$

ја добиваме квадратната равенка

$$5y^2 + 3y = 0$$

чиј корени се

$$y_1 = 0 \text{ и } y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Во тој случај од двете равенки

$$x^2 = 0 \text{ и } x^2 = -\frac{3}{5}$$

само првата равенка има еден двоен корен  $x_{1,2} = 0$ . Според тоа, дадената биквадратна равенка има еден двоен корен

$$x_{1,2} = 0. \blacklozenge$$

**Задача 6.** Реши ја биквадратната равенка  $7x^4 + 3 = 0$ .

**Решение.** Со воведување на смената

$$x^2 = y$$

ја добиваме квадратната равенка

$$7y^2 + 3 = 0$$

која нема реални корени. Според тоа, дадената биквадратна равенка нема реални корени. ♦

Од изложените примери не е тешко да се заклучи дека една биквадратна равенка има или четири или два или нема ниту еден реален корен.

Освен тоа ако еден реален број  $x_0 \neq 0$  е корен на биквадратна равенка

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

тогаш

$$ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0.$$

Бидејќи

$$a(-x_0)^4 + b(-x_0)^2 + c = ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0$$

можеме да заклучиме дека неговиот спротивен реален број  $-x_0$  е исто така корен на равенката.

Понатаму ако  $x_0 = 0$  е корен на една биквадратна равенка, тогаш од  $ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0$  следува  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$ , односно  $c = 0$ . Според тоа можеме да заклучиме дека разгледуваната биквадратна равенка е од облик  $ax^4 + bx^2 = 0$ . Последната равенка има два реални корени еднакви на нула. Според тоа ако биквадратната равенка има корен  $x_0 = 0$  тогаш тој е двоен корен. Уште повеќе ако  $b = 0$ , тогаш  $x_0 = 0$  е четворен корен.

Според тоа корените на една биквадратна равенка се реални броеви кои разгледувани на бројната оска се симетрични во однос на нулата.

### Задачи

1. Кои од следните равенки се биквадратни равенки:

- а)  $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ ;      б)  $3x^4 - 7x^2 + 1 = 0$ ;      в)  $x^3 + 2x^2 - 7 = 0$ ;  
г)  $2x^4 - 9 = 0$ ;      д)  $3x^4 - 2x^2 = 0$ ;      е)  $7x^4 - 2x = 0$ .

2. Определи ги корените на следниве биквадратни равенки:

- а)  $9x^4 - 226x^2 + 25 = 0$ ;      б)  $-36x^4 + 25x^2 - 4 = 0$ ;      в)  $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$ ;  
г)  $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ ;      д)  $4x^4 - 1 = 0$ ;      е)  $49x^4 + 2x^2 = 0$ .

3. Реши ги следниве биквадратни равенки:

- а)  $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ ;      б)  $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$ ;      в)  $4t^4 - 17t^2 + 4 = 0$ ;  
г)  $7x^4 + 3 = 0$ ;      д)  $64x^4 - 9x^2 = 0$ ;      е)  $49x^4 - 81 = 0$ .

4. Колку корени имаат следниве биквадратни равенки?

- а)  $9x^4 - 38x^2 + 8 = 0$ ;      б)  $-x^4 - 5x^2 - 4 = 0$ ;      в)  $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$ ;  
г)  $x^4 + 5x^2 + 8 = 0$ ;      д)  $(z^2 - 3)^2 - 16 = 0$ ;      е)  $(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) = 2$ .

5. Разложи ги на множители полиномите:

- а)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ;      б)  $4y^4 - 29y^2 + 25 = 0$ .

6. Скрати ги дробките:

- а)  $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 13x^2 + 36}$ ;      б)  $\frac{x^4 - 11x^2 + 24}{x^4 - 17x^2 + 72}$ .



## 5.2. Равенки што се сведуваат на квадратни со соодветна смена

Постојат различни видови равенки кои со одредени смени и трансформации може да се сведат на решавање квадратни равенки. Некои од тие равенки треба претходно да ги разложиме на множители со помош на формулите за скратено множење.

### Решавање на некои биномни равенки

**Пример 1.** Равенката  $x^3 - 1 = 0$  може да ја решиме ако претходно ја разложиме на множители користејќи ја формулата разлика на кубови, па имаме:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Овој производ е нула ако барем еден од множителите е нула т.е.  $x - 1 = 0$  или  $x^2 + x + 1 = 0$ . Значи ја добивме вкупноста равенки  $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ , од каде од првата

равенка се добива  $x_1 = 1$ , а решение на втората равенка се  $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . ♦

На овој начин имаме постапка за решавање равенки од видот  $ax^3 - a = 0$ , за  $a \neq 0$ .

Се поставува прашање како ќе ја решиме равенката од видот  $ax^3 - b = 0$ , ако  $a, b \neq 0$ .

Со помош на смената  $x = y\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ , равенката  $ax^3 - b = 0$  станува равенка од видот  $by^3 - b = 0$ .

**Задача 1.** Реша ја равенката  $3x^3 - 2 = 0$ .

**Решение.** Со помош на смената  $x = y\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = y\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  се добива равенката  $3\left(y\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2 = 0$ ,

т.е.  $2y^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(y^3 - 1) = 0$ . Аналогно на решението од пример 1 имаме:

$y_1 = 1, y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ , па со враќање во смената се добиваат решенијата

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, x_{2,3} = \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Имајќи го ова предвид може да ги решиме сите равенки од видот  $ax^6 - a = 0$ , за  $a \neq 0$  ако претходно запишеме дека  $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$ . ♦

Равенката од видот  $ax^n + b = 0$ , за  $a, b \neq 0$  и  $n \in \mathbb{N}$  се нарекува **биномна равенка** од  $n$ -

ти степен и таа со смената  $x = y\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$  се сведува на равенка од видот  $y^n - 1 = 0$ . Овде ќе

се задржиме само на оние равенки чија лева страна може да се запише како производ на линеарни и квадратни множители.

**Задача 2.** Реша ги равенките:

**а)**  $3x^4 - 2 = 0$ ,

**б)**  $2x^4 + 7 = 0$ .

**Решение. а)** Со смената  $x = y\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$  се добива равенката

$2y^4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(y^4 - 1) = 0$ , а после разложувањето на множители

$(y^2 - 1)(y^2 + 1) = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) = 0$  се добива вкупноста

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ y^2 + 1 = 0 \end{cases} \text{ т.е. } y_1 = 1, y_2 = -1, y_{3,4} = \pm i.$$

Со враќање во смената се добива  $x_1 = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, x_2 = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, x_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{\frac{2}{3}},$

**б)** Со смената  $x = y\sqrt[4]{\frac{7}{2}}$  се добива равенката  $7(y^4 + 1) = 0$ . Сега за да ја разложиме на множители левата страна ја дополнуваме до полн квадрат и имаме  $y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = (y^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y^2 - \sqrt{2}y + 1)$ . Ова значи дека треба да ги најдеме сите решенија на вкупноста  $\begin{cases} y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ y^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0 \end{cases}$ . Решенијата на овие

равенки се  $y_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, y_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$ , а со враќање во смената

$x = y\sqrt[4]{\frac{7}{2}}$  се добива  $x_{1,2} = \left(\frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{7}{2}}$  и  $x_{3,4} = \left(\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{7}{2}}$ . ♦

### Решавање на некои триномни равенки

Равенките од облик  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ , за  $a, b, c \in \mathbb{R}$  и  $a \neq 0$  се викаат триномни равенки и со смената  $x^n = y$  се сведуваат на квадратна равенка. Од овие равенки овде ќе се задржиме на оние кај кои равенките  $x^n = y$  може да ги решиме со разложување на производ од линеарни и квадратни множители.

**Пример 2.** Равенката  $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$  со смената  $x^3 = y$  се сведува на равенката  $y^2 - 28y + 27 = 0$  т.е.  $y_{1,2} = \frac{28 \pm 26}{2}$ , од каде се добива дека  $y_1 = 1, y_2 = 27$ , па сега треба

да ги решиме равенките  $x^3 = 1$  и  $x^3 = 27$ . Аналогно на претходните задачи имаме:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y - 3 = 0 \\ y^2 + 3y + 9 = 0 \end{cases} \text{ т.е. } x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, x_4 = 3, x_{5,6} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}. \blacklozenge$$

### Равенки од квадратен вид

Равенките од видот  $a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = 0$ , за  $a, b, c \in \mathbb{R}$  и  $a \neq 0$ , се викаат **равенки од квадратен вид** и со смената  $f(x) = y$  се трансформираат во квадратни равенки. Притоа  $f(x)$  е израз кој зависи од непознатата  $x$ .

**Пример 3.** Равенката  $(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$  со смената  $x^2 + x + 1 = y$  се трансформира во  $y^2 - 3y + 2 = 0$  чии решенија се  $y_1 = 1$  и  $y_2 = 2$ . Со враќање во смената се добива  $x^2 + x + 1 = 1$  т.е.  $x^2 + x = 0$  чии решенија се  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -1$  и  $x^2 + x + 1 = 2$  т.е.  $x^2 + x - 1 = 0$  чии решенија се  $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  и  $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . ♦

**Симетрични равенки од трети и четврти степен**

Равенката од видот  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ , за  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a \neq 0$  се вика **симетрична равенка од трет степен**.

**Пример 3.** Равенката  $5x^3 + 2x^2 + 2x + 5 = 0$  е симетрична равенка од трет степен и со разложување на левата страна се добива:

$$\begin{aligned} 5x^3 + 2x^2 + 2x + 5 &= 5(x^3 + 1) + 2x(x+1) = 5(x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) = \\ &= (x+1)(5x^2 - 5x + 5 + 2x) = (x+1)(5x^2 - 3x + 5) = 0 \end{aligned}$$

т.е.  $\begin{cases} x+1=0 \\ 5x^2-3x+5=0 \end{cases}$  од каде се добиваат решенијата  $x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{91}}{10}$ . ♦

Равенката од видот  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , за  $a, b, c \in \mathbb{R}$  и  $a \neq 0$  се вика **симетрична равенка од четврти степен**. Постапката за решавање се одвива во два чекори. Во првиот равенката се дели со  $x^2$  и равенката го има обликот

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

а потоа се става смена  $x + \frac{1}{x} = y$ , на тој начин се добива равенката

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ т.е. } ay^2 + by - 2a + c = 0.$$

**Задача 3.** Реши ги равенките:

**а)**  $x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 1 = 0$ ,

**б)**  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ .

**Решение. а)** Ако ја следиме постапката и прво поделиме со  $x^2$  ќе се добие равенката  $x^2 + x + 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ , а со смената  $x + \frac{1}{x} = y$  ја имаме равенката  $y^2 - 2 + y + 4 = 0$  т.е.  $y^2 + y + 2 = 0$ . Последната квадратна равенка има решенија кои се комплексни броеви, па велиме дека равенката  $x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 1 = 0$  нема решение во множеството реални броеви, т.е добиваме равенка со комплексни коефициенти.

**б)** Аналогно на а) се добива  $y^2 + y - 2 = 0$  чии решенија се  $y_1 = 1, y_2 = -2$ . Со враќање

во смената се добива  $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{cases}$  т.е.  $\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$  од каде се добиваат решенијата

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \text{ и } x_3 = x_4 = -1. \text{ ♦}$$

**Задачи**

**1.** Реши ги равенките:

**а)**  $x^3 - 64 = 0$ ,

**б)**  $x^4 - 81 = 0$ ,

**в)**  $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$ ,

**г)**  $(x^2 + 5x + 8)^2 - 6(x^2 + 5x + 8) + 8 = 0$ ,

**д)**  $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$ ,

**е)**  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ .

### 5.3. Ирационални равенки

#### Поим за ирационална равенка

Да ги разгледаме равенките од облик

$$\sqrt{x+2}=1, \sqrt[5]{x+3}-1=\sqrt{3x+1}, \frac{1}{\sqrt{x+2}}-\sqrt{3x+2}=0$$

Се поставува прашањето кое заедничко својство го поседуваат наведените равенки? Освен тоа што тие се равенки со една непозната, сите тие содржат ирационална функција во однос на непознатата, односно во сите овие равенки непознатата  $x$  се содржи под знакот за коренување.

Равенки кои ја содржат непозната под знакот за корен се викаат **ирационални равенки**.

**Пример 1.** Равенките

$$\sqrt{x+2}-1=\sqrt{x^2-2}, \sqrt[5]{x+1}-\sqrt{x^3-x+2}=2x+1, \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-2}=\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+2}=4, \sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}\sqrt{9-\frac{2}{x}}$$

се примери на ирационални равенки. ♦

#### Решавање на ирационални равенки со степенување

Големата разновидност на ирационалните равенки оневозможува нивно претставување во општ облик. Заради тоа не сме во можност да изнајдеме универзален алгоритам за нивно решавање. Но сепак во основа на постапката за решавање на една ирационална равенка е операцијата степенување. Нашето проучување ќе биде насочено на проучување на некои видови ирационални равенки кои се сведуваат на квадратни или линеарни равенки.

**Задача 1.** Реша ја ирационалната равенка

$$5+\sqrt{x^2+x+7}=2x.$$

**Решение.** Дадената ирационална равенка е еквивалентна со равенката

$$\sqrt{x^2+x+7}=2x-5.$$

Со квадрирање на двете страни на равенката ја добиваме квадратната равенка

$$x^2+x+7=(2x-5)^2,$$

чији корени се

$$x_1=6 \text{ и } x_2=1.$$

Сега се поставува прашањето: Каква врска постои меѓу корените на добиената квадратната равенка и корените на дадената ирационална равенка? Бидејќи

$$6^2+6+1>0 \text{ и } 1^2+1+7>0,$$

можеме да заклучиме дека двата добиени корени на квадратната равенка се во дефиниционото множество на ирационалната равенка, односно за секој од нив изразите во равенката имаат смисла. Со замена за двете вредности на корените во ирационалната равенка добиваме едно вистинито бројно равенство

$$5+\sqrt{6^2+6+7}=2 \cdot 6$$

и едно невистинито бројно равенство

$$5+\sqrt{1^2+1+7}=2 \cdot 1,$$

откаде можеме да заклучиме дека само еден од корените на квадратната равенка  $x_1 = 6$  е корен и на ирационалната равенка. ♦

При квадрирање на една ирационалната равенка добиената квадратна равенка има пошироко дефиниционо множество. Секој корен на квадратната равенка не е корен на ирационалната равенка. Уште повеќе ирационалната равенка нема други корени различни од корените на квадратната равенка. Од тие причини неопходно е да провериме кои од корените на квадратната равенка се корени на ирационалната равенка. Ако квадратната равенка нема решение, тогаш и ирационалната равенка нема решение.

**Задача 2.** Реши ја ирационалната равенка

$$\sqrt{x-3} = -1.$$

**Решение.** Со квадрирање на двете страни на равенката ја добиваме линеарната равенка

$$x-3=1$$

чие решение е

$$x=4.$$

Добиеното решение на линеарната равенка не е решение на ирационалната равенка бидејќи

$$\sqrt{4-3} = \sqrt{1} \neq -1.$$

Според тоа, дадената равенка нема решение. ♦

До заклучокот дека равенката дадена во последниот пример нема решение можеме да дојдеме ако воочиме дека левата страна на равенката е позитивен реален број за секоја допуштена вредност на непознатата, додека десната страна е негативен број. Значи за секоја допуштена вредност на непознатата равенката преминува во неистинито бројно равенство.

**Задача 3.** Реши ја ирационалната равенка

$$\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} = -1.$$

**Решение.** Дадената ирационална равенка е еквивалентна со равенката

$$\sqrt{2x-15} = \sqrt{x+16} - 1.$$

Со квадрирање на двете страни на равенката ја добиваме равенка

$$2x-15 = x+16 - 2\sqrt{x+16} + 1,$$

која е еквивалентна на равенката

$$x-32 = -2\sqrt{x+16}.$$

Со квадрирање на добиената равенка ја добиваме квадратната равенка

$$x^2 - 68x + 960 = 0,$$

чии корени се

$$x_1 = 48 \text{ и } x_2 = 20.$$

Со проверка заклучуваме дека дадената ирационална равенка има само еден корен  $x = 20$ . ♦

Кај равенките кај кои непознатата е под знакот за кубен корен не се појавуваат проблеми со дефиниционата област како кај равенките кај кои непознатата е под квадратен корен, бидејќи во тој случај равенката има смисла и за негативни вредности на поткореновата величина.

**Задача 4.** Реши ја ирационалната равенка

$$\sqrt[3]{15+2x} + \sqrt[3]{13-2x} = 4.$$

**Решение.** Со кубирање на двете страни на равенката добиваме еквивалентна на неа равенка

$$(15+2x) + (13-2x) + 3\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}(\sqrt[3]{15+2x} + \sqrt[3]{13-2x}) = 64.$$

која понатаму е еквивалентна на равенката

$$(15+2x) + (13-2x) + 3 \cdot 4\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)} = 64,$$

односно со равенката

$$\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)} = 3.$$

Повторно, со кубирање на двете страни на равенката добиваме еквивалентна на неа квадратната равенка

$$x^2 + x - 42 = 0,$$

чији корени се  $x_1 = 6$  и  $x_2 = -7$ . Добиените корени се корени и на ирационалната равенка. ♦

### Ирационални равенки со параметар

Во продолжение ќе наведеме неколку примери на ирационални равенки со параметар, кои се решаваат со различни методи, во зависност од равенката. Кај нив ќе треба да се дискутира за решенијата на равенката во зависност од параметарот, т.е. треба да се реши равенката за секоја вредност на дадениот параметар.

**Задача 5.** Реша ја ирационалната равенка, во зависност од параметрите  $a$  и  $b$

$$\sqrt{a+bx} = 2.$$

**Решение.** Со квадрирање на двете страни на равенката добиваме

$$a+bx = 4,$$

од каде што следува дека  $x = \frac{4-a}{b}$ . Според тоа, равенката има решение за секој реален број  $a$  и за секој реален број  $b \neq 0$ . ♦

**Задача 6.** Во зависност од параметарот  $m$ , дискутирај ги реалните решенија на равенката  $\sqrt{x+m} = x+m$ .

**Решение.** Да забележиме дека мора да важи  $x \geq -m$ . Сега, со квадрирање на равенката и трансформација на добиените исрази, ја добиваме квадратната равенка  $x^2 + (2m-1)x + m^2 - m = 0$ , чија дискриминанта е  $D=1$ , па квадратната равенка има две решенија  $x_1 = -m$  и  $x_2 = 1-m$ . Јасно, исполнето е дека  $x_1 + m \geq 0$  и  $x_2 + m \geq 0$ . Според тоа, за секој  $m$  дадената равенка има две решенија. ♦

**Задача 7.** Реша ја равенката, во зависност од реалниот параметар  $a$

$$\sqrt{x+8} = a.$$

**Решение.** Бидејќи изразот под корен и десната страна мора да се ненегативни броеви, добиваме  $a \geq 0$  и  $x \geq -8$ . При тие услови со квадрирање на равенката добиваме  $x+8 = a^2$ , т.е.  $x = a^2 - 8$ . Јасно,  $a^2 - 8 \geq -8$ . Да заклучиме, за  $a < 0$  равенката нема решение, а за  $a \geq 0$  има едно решение  $x = a^2 - 8$ . ♦

**Задача 8.** Реша ја равенката со параметар  $a \in \mathbb{R}$   $(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ . За кои вредности на  $a$  равенката има единствено решение?

**Решение.** Изразот под корен мора да е ненегативен, т.е.  $x \geq 4a + 32$ . За тие вредности на  $x$ , равенката е еквивалентна со вкупноста  $\begin{cases} x + 4a = 0 \\ x - 4a - 32 = 0 \end{cases}$ , т.е. можени решенија се  $x_1 = -4a$  или  $x_2 = 4a + 32$ .

Ако  $-4a \leq 4a + 32$  добиваме  $a \geq -4$ , па за  $a = -4$  важи  $-4a = 4a + 32$ , т.е. корените се совпаѓаат. За  $a > -4$  важи  $-4a < 4a + 32$ , па  $x_1$  не е во дефиниционата област, т.е. не е решение. Значи, за  $a \geq -4$  равенката има едно решение  $x_2 = 4a + 32$ .

Ако  $a < -4$ , тогаш  $-8a > 32$ , т.е.  $-4a > 4a + 32$ , па и  $x_1$  е во дефиниционата област. Значи, за  $a < -4$  дадената равенка има две решенија. ♦

**Задача 9.** Најди ги сите вредности на реалниот параметар  $a$  за кои равенката  $\sqrt{x^2 - 4ax - 7a} = 3 - x$  нема решение.

**Решение.** Од десната страна на равенката добиваме дека важи  $3 - x \geq 0$ , т.е.  $x \leq 3$ . За овие вредности на  $x$ , по квадрирањето и средувањето на равенката добиваме  $2(3 - 2a)x = 7a + 9$ .

- Нека  $a \neq \frac{3}{2}$ . Тогаш  $x = \frac{7a + 9}{2(3 - 2a)}$  не е решение ако  $\frac{7a + 9}{2(3 - 2a)} > 3$ , т.е.  $\frac{19a - 9}{2(3 - 2a)} > 0$ . Од последната неравенка следува дека  $\begin{cases} 19a - 9 > 0 \\ 3 - 2a > 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 19a - 9 < 0 \\ 3 - 2a < 0 \end{cases}$ .

Вториот систем нема решение, а првиот има решение  $a \in \left(\frac{9}{19}, \frac{3}{2}\right)$ .

- Ако  $a = \frac{3}{2}$ , тогаш од  $2(3 - 2a)x = 7a + 9$  добиваме  $0x = \frac{21}{2} + 9$  што не е можно.

Значи за  $a \in \left(\frac{9}{19}, \frac{3}{2}\right]$  равенката нема решение.

Да забележиме дека за  $a \notin \left(\frac{9}{19}, \frac{3}{2}\right]$  равенката има решение  $x = \frac{7a + 9}{2(3 - 2a)}$ . Тоа го

утврдуваме со замена во левата страна од равенката. Така по замената левата страна е

еднаква на  $\sqrt{\frac{(9 - 19a)^2}{4(3 - 2a)^2}}$ . Бидејќи за  $a \notin \left(\frac{9}{19}, \frac{3}{2}\right]$  важи  $a \leq \frac{9}{19} < \frac{3}{2}$  или  $a > \frac{3}{2} > \frac{9}{19}$

следува дека  $\frac{9 - 19a}{3 - 2a} \geq 0$ , па  $\sqrt{\frac{(9 - 19a)^2}{4(3 - 2a)^2}} = \frac{9 - 19a}{2(3 - 2a)}$ . Со замена на  $x = \frac{7a + 9}{2(3 - 2a)}$  во

десната страна се добива  $3 - x = \frac{9 - 19a}{2(3 - 2a)}$ . ♦

**Задача 10.** За кои вредности на параметарот  $a$  равенката  $\sqrt{x + a} = x + 2$  има единствено решение.

**Решение.** За  $x \geq -2$  и  $x \geq -a$  имаме  $x + a = x^2 + 4x + 4$ , т.е.  $x^2 + 3x + 4 - a = 0$ . Почетната равенка ќе има едно решение само во случаите кога

- Дискриминантата на равенката  $x^2 + 3x + 4 - a = 0$  е еднаква на нула и за нејзините решенија важи  $x_1 = x_2 \geq -2$ .

Во овој случај имаме  $D = 9 - 4(4 - a) = 4a - 7$ . За  $a = \frac{7}{4}$  имаме  $x_1 = x_2 = \frac{-3}{2}$  и притоа важи  $-\frac{3}{2} \geq -2$  и  $-\frac{3}{2} > -\frac{7}{4}$ , па  $-\frac{3}{2}$  е единствено решение за  $a = \frac{7}{4}$ .

- Едното решение на равенката  $x^2 + 3x + 4 - a = 0$  е помало од  $-2$  а другото поголемо или еднакво од  $-2$ .

Овде  $D = 4a - 7 > 0$ , т.е.  $a > \frac{7}{4}$ , па решенијата на  $x^2 + 3x + 4 - a = 0$  се

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4a-7}}{2}$ . Помалото решение треба да е помало од  $-2$ , т.е.

$\frac{-3 - \sqrt{4a-7}}{2} < -2$ . Последното неравенство е еквивалентно со  $a > 2$ . За

поголемто решение важи  $\frac{-3 + \sqrt{4a-7}}{2} > -\frac{3}{2} > -2$ . Значи, за  $a > 2$  само

$\frac{-3 + \sqrt{4a-7}}{2}$  е решение на почетната равенка.

Конечно, равенката има единствено решение за  $a \in \left\{\frac{7}{4}\right\} \cup (2, \infty)$ . ♦

**Задача 11\*.** Реши ја равенката, во зависност од реалниот параметар  $a > 4$

$$\sqrt{a^2 - (x+2)^2} = -x + 2.$$

**Решение.** Од десната страна на равенката следува дека важи  $-x + 2 \geq 0$ , т.е.  $x \leq 2$ .

Од друга страна мора да важи и  $a^2 - (x+2)^2 \geq 0$ . Оттука следува дека

$(a - x - 2)(a + x + 2) \geq 0$ . Оттука добиваме дека  $\begin{cases} a - x - 2 \geq 0 \\ a + x + 2 \geq 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} a - x - 2 \leq 0 \\ a + x + 2 \leq 0 \end{cases}$ . Од

првиот систем добиваме  $x \leq a - 2$  и  $x \geq -a - 2$ , па заради  $-a - 2 < a - 2$  добиваме дека  $x \in [-a - 2, a - 2]$ . Од вториот систем имаме  $x \geq a - 2$  и  $x \leq -a - 2$ , па вториот систем нема решение.

Значи имаме  $x \leq 2$  и  $x \in [-a - 2, a - 2]$ .

Со квадрирање на дадената равенка добиваме  $a^2 - (x+2)^2 = x^2 - 2x + 4$ , па со средување имаме  $2x^2 = a^2 - 8$ . Според тоа мора да важи  $a^2 - 8 \geq 0$ , т.е.

$(a - 2\sqrt{2})(a + 2\sqrt{2}) \geq 0$ . Решение на последната неравенка е

$a \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty)$ . Заради  $a > 4$  добиваме  $a \in (4, \infty)$ .

Од друга страна  $x \leq 2$ , па ако  $x^2 \leq 4$ , следува  $\frac{a^2 - 8}{2} \leq 4$ , т.е.  $a^2 \leq 16$ , што не е можно.

Значи мора  $x^2 \geq 4$ , т.е.  $x \leq -2$ . Сега, од  $2x^2 = a^2 - 8$  добиваме дека кандидат за

решение е само  $x = -\sqrt{\frac{a^2 - 8}{2}}$ . Лесно се проверува дека за него важат  $x \in [-a - 2, a - 2]$



и  $x \leq -2$ , па равенката има решение за секој  $a > 4$  и решението е  $x = -\sqrt{\frac{a^2 - 8}{2}}$ . ♦

### Задачи

1. Кои од следниве равенки по  $x$  се ирационални:

- а)  $x\sqrt{2} - 7x = 1$ ; б)  $\sqrt[3]{x} + x + \sqrt{x} = 2$ ;  
 в)  $x^2 - 5x\sqrt{a} = 0$ ; г)  $2\sqrt{x-7} = 1 - \sqrt{x-1}$ ?

2. Дали се еквивалентни следниве равенки:

- а)  $\sqrt{5x+1} = \sqrt{x-1}$  и  $5x+1 = (x-1)^2$ ; б)  $\sqrt{x-2} = 3$  и  $x-2 = 9$ .  
 в)  $\sqrt[3]{x^3-7} = x-1$  и  $x^3-7 = (x-1)^3$ ; г)  $-\sqrt{x^2-2} = x$  и  $x^2-2 = x^2$ ?

3. Определи го множеството решенија на следниве ирационални равенки:

- а)  $\sqrt{x-1} = 0$ ; б)  $3 + \sqrt{x-2} = 4$ ; в)  $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$ ;  
 г)  $\sqrt{2x^2-5x-3} = x+1$ ; д)  $\sqrt[3]{(4x+9)^2} = 9$ ; е)  $\sqrt[3]{x^2-x+1} = \frac{1}{2}$ .

4. Реши ги следниве ирационални равенки:

- а)  $\sqrt{5+\sqrt{3+x}} = 3$ ; б)  $\sqrt{16+\sqrt{x+4}} = 5$ ; в)  $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}} = 3$ .

5. Најди ги корените на следниве ирационални равенки:

- а)  $\sqrt{2x-9} = \sqrt{6-x}$ ; б)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ ;  
 в)  $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$ ; г)  $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{\sqrt{3x-5}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}$ .

6. Без решавање објасни зошто немаат решение следниве равенки:

- а)  $\sqrt{x+5} = -10$ ; б)  $\sqrt{7} + \sqrt{x-1} = 0$ ;  
 в)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+3} = -1$ ; г)  $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} = 1$ .

7. За секоја вредност на реалниот параметар  $a$  реши ја равенката

$$(x-2)\sqrt{x-a} = 0.$$

### 5.4. Решавање на ирационални равенки со метод на смена на променливата

**Задача 1.** Реши ја равенката

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0.$$

**Решение.** Воведуваме смена на променливата

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = y.$$

Со квадрирање добиваме

$$2x^2 + 3x + 9 = y^2.$$

Во тој случај дадената равенка добива облик

$$y^2 - 9 - 5y + 3 = 0$$

односно

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

што претставува квадратна равенка по променливата  $y$ , чии решенија се

$$y_1 = -1 \text{ и } y_2 = 6.$$

Согласно воведената смена имаме дека  $y$  е ненегативно, што значи дека решението  $y_1 = -1$  треба да го отфрлиме. Така, добиваме дека

$$y_2 = 6 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 9 = 36 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{9}{2} \text{ и } x_2 = 3.$$

Со непосредна проверка заклучуваме дека  $x_1 = -\frac{9}{2}$  и  $x_2 = 3$  се решенија на дадената равенка. ♦

**Задача 2.** Реши ја равенката

$$\frac{x}{1-x} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 1.$$

**Решение.** Воведуваме смена на променливата

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = y.$$

Со квадрирање добиваме

$$\frac{x}{1-x} = y^2.$$

Во тој случај дадената равенка добива облик

$$y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$$

односно

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

што претставува квадратна равенка по променливата  $y$ , чии решенија се

$$y_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } y_2 = 2.$$

Согласно воведената смена имаме дека  $y$  е ненегативно, што значи дека решението  $y_1 = -\frac{1}{2}$  треба да го отфрлиме. Така, добиваме дека

$$y = 2 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}. \quad \blacklozenge$$

Со непосредна проверка утврдуваме дека  $x = \frac{4}{5}$  е решение на равенката. ♦

**Задача 3.** Реши ја равенката

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}.$$

**Решение.** Воведуваме смена на променливата

$$\sqrt{x} = y.$$

Во тој случај дадената равенка преминува во дробно рационалната равенка по променливата  $y$

$$\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

која со примена на методот за решавање на дробно рационалната равенка се сведува на квадратна равенка

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

чии решенија се

$$y_1 = -1 \text{ и } y_2 = 3.$$

Согласно воведената смена имаме дека  $y$  е ненегативно, што значи дека решението  $y_1 = -1$  треба да го отфрлиме. Така, добиваме дека

$$y = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \blacklozenge$$

Со непосредна проверка утврдуваме дека  $x = 9$  е решение на равенката.  $\blacklozenge$

### Задачи

1. Определи го множеството решенија на следниве ирационални равенки:

а)  $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 0;$

б)  $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4;$

в)  $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5;$

г)  $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6}.$

2. Реши ги следниве ирационални равенки:

а)  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2;$

б)  $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2};$

в)  $3\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} - \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2;$

г)  $\sqrt{\frac{x+4}{1-2x}} - \sqrt{\frac{1-2x}{x+4}} = 2.$

## 5.5. Систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати

Равенка во која барем еден од двата изрази содржи две непознати се вика **равенка со две непознати**.

Равенка со две непознати кои се на прв степен се вика равенка од прв степен со две непознати или **линеарна равенка со две непознати**. Равенка со две непознати кои се на втор степен се вика равенка од втор степен со две непознати или **квадратна равенка со две непознати**.

**Пример 1. а)** Равенките

$$x - 3y = 4, \quad 2x^4 - 3y + 3 = y^3, \quad x^2 - 2xy + 3x + 2y - 3 = 0, \quad \sqrt{x+2} - y = 3$$

се примери на равенки со две непознати.

**б)** Равенките

$$2x - 3y = 4, \quad 2x = 3y, \quad 7 - y = 4x, \quad x - y - 4 = 0$$

се примери на линеарни равенки со две непознати.

**в)** Равенките

$$2x^2 + xy + y^2 - x + 3y - 1 = 0, \quad 2xy + y^2 = 0, \quad x^2 - 2y^2 = 0, \quad xy = 0$$

се квадратни равенки со две непознати.  $\blacklozenge$

Решение на равенка со две непознати е секој подреден пар од вредности на непознатите  $(x_0, y_0)$ , од дефиниционото множество за кое равенката преминува во точно бројно равенство.

**Пример 2.** Подредените парови  $(0,1)$ ,  $(0,-3)$ ,  $(1,5)$  се решенија на равенката  $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$ , додека подредените парови  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  не се нејзини решенија.  $\blacklozenge$

Аналогни својства за еквивалентност на равенки со една непозната важат и за равенки со две непознати.

- Ако кон двете страни на една равенка со две непознати додадеме еден ист израз, кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата, се добива нова равенка еквивалентна на дадената.

- Ако двете страни на равенката имаат исти членови, тие можат да се поништат. Понатаму, секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката на другата, при што неговиот знак се менува во спротивен. На тој начин равенката може да се доведе во облик во кој сите изрази се од левата страна, а оддесно е 0, т.е.  $R(x, y) = 0$ .

**Пример 3.** Равенките

$$2xy + y^2 = 3 \text{ и } (2xy + y^2) + (x - y) = 3 + (x - y)$$

се еквивалентни. Такви се и равенките

$$x^2 + 3xy = 2x + y^2 \text{ и } x^2 + 3xy - 2x - y^2 = 0. \blacklozenge$$

- Ако двете страни на дадена равенка се помножат со еден ист израз, кој за сите вредности на непознатата е дефиниран и различен од нула, ќе се добие нова равенка еквивалентна на дадената.

**Пример 4. а)** Ако двете страни на равенката  $3(x^2 - 2y + 1) = 15$  ги поделиме со (или ги помножиме со  $\frac{1}{3}$ ) добиваме еквивалентна равенка  $x^2 - 2y + 1 = 5$ .

**б)** Ако двете страни на равенката  $\frac{2x - 7xy}{3} = \frac{x^2 + y}{2} - 5$  ги помножиме со НЗС на именителите, односно со бројот 6, ќе добиеме еквивалентна равенка на дадената  $4x - 14xy = 3x^2 + 3y - 30$ .  $\blacklozenge$

Со сите наведени трансформации, секоја линеарна равенка со две непознати може да ја доведеме до равенка од видот

$$ax + by + c = 0$$

наречен **општ вид на линеарна равенка со две непознати**, каде што  $a$ ,  $b$  и  $c$  се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата  $x$ , наречени коефициенти на равенката.

Квадратна равенка со две непознати е еквивалентна со равенка од видот

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

наречен **општ вид на квадратна равенка со две непознати**, каде што  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $f$  се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата  $x$ , наречени коефициенти на равенката.

**Пример 5. а)** Равенките

$$x - 3y - 4 = 0, \quad 2x - y + 1 = 0, \quad x - \frac{2}{3}y + \sqrt{3} = 0$$

се линеарни равенки со две непознати од општ вид.

**б)** Равенките

$$2x^2 + xy + y^2 - x + 3y - 1 = 0, \quad 2xy + y^2 = 0, \quad x^2 - 2y^2 = 0, \quad xy = 0$$

квадратни равенки со две непознати од општ вид.  $\blacklozenge$

Множеството од равенки со две исти непознати се вика **систем равенки со две непознати**. **Решение** на систем равенки со две непознати е секој подреден пар вредности на непознатите  $(x_0, y_0)$ , кој е решение на секоја од равенките на системот. Да се реши даден систем равенки со две непознати значи да се определи множеството од сите негови решенија. Множеството решенија на даден систем равенки со две

непознати се состои од заедничките решенија на секоја од равенките на системот.

Два системи равенки со две непознати се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Ако една од равенките во системот ја замениме со равенка еквивалентна на неа добиваме систем еквивалентен на дадениот.

Систем од две равенки од кои едната е линеарна равенка со две непознати, а другата е квадратна равенка со две непознати се вика **систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати**. Заради теоремите за еквивалентни равенки, секој систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати е еквивалентен со систем од видот

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

наречен општ облик на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати со коефициенти  $m, n, p, a, b, c, d, e$  и  $f$ .

**Пример 6.** Системот

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3 \\ \frac{1}{9}x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2 \end{cases}$$

е систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати. Тој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Подредениот пар  $(0, -3)$  е решение на дадениот систем, додека подредениот пар  $(3, 0)$  не е негово решение. Навистина, имаме дека

$$\begin{cases} 0 - 3 \cdot (-3) - 9 = 0 \\ 0^2 + (-3)^2 - 9 = 0, \end{cases} \text{ но } \begin{cases} 3^2 + 0^2 - 9 = 0 \\ 3 - 3 \cdot 0 - 9 \neq 0. \end{cases} \blacklozenge$$

### Задачи

**1.** Кои од следниве системи е систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

**а)**  $\begin{cases} 2x = y \\ y^2 + xy = 4y \end{cases};$

**б)**  $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x^2 + xy - 3 = y^2 \end{cases};$

**в)**  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + xy^2 = 4 \end{cases};$

**г)**  $\begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x^2z + 3z^2 = 6 \end{cases};$

**д)**  $\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 0 \\ x^2 + \sqrt{3}y^2 = 2x - y \end{cases};$

**е)**  $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 0 \\ x^2 = -\sqrt{5}y^2 \end{cases}.$

**2.** Да се трансформира во општ облик системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

**а)**  $\begin{cases} 3x = 1 - y \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases};$

**б)**  $\begin{cases} \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}x - 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy = y^2 + \frac{1}{2} \end{cases};$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{cases} x = z - 4 \\ x^2 + 2z^2 = x - 3z + \frac{1}{2} \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 = 1 - x \end{cases} \\ \text{д)} \begin{cases} y = 10 + x \\ (x-1)^2 + 2(y-3)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} & \text{ѓ)} \begin{cases} \frac{1}{2}x = -\sqrt{3}y \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases} \end{array}$$

3. Одреди ги коефициентите на системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 3x + 1 = y \\ 3x^2 + xy + y^2 + x - 1 = y \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{1}{3}y = x - 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy = 3y^2 + 4 \end{cases} \end{array}$$

4. Дали подредениот пар  $(1, -2)$  е решение на системот од линеарна и квадратна равенка:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} 4x = 2 - y \\ x^2 + 3xy + 3y^2 = 7 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + \frac{1}{2}xy + 5y^2 - 3 = 0 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{array}$$

5. Кои од следниве подредени парови е решение на системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати  $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x-1)^2 + xy + y^2 + 3y = 5 \end{cases}$ :

$$\text{а)} (0, 1); \quad \text{б)} \left(3, \frac{1}{2}\right); \quad \text{в)} (6, -5); \quad \text{г)} (1, -\sqrt{2}).$$

### 5.6. Решавање на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати

Да го илустрираме со пример методот за решавање на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати.

**Задача 5.** Реша го системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ 5x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Од првата равенка на системот добиваме

$$x = -\frac{3y+5}{2}.$$

Со замена на добиениот израз за  $x$  во втората равенка на системот ја добиваме равенката:

$$5\left(-\frac{3y+5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3y+5}{2}\right)y - y^2 + 3\left(-\frac{3y+5}{2}\right) - 2y - 11 = 0$$

која е еквивалентна на квадратната равенка

$$29y^2 + 104y + 51 = 0,$$

чиј корени се  $y_1 = -3$  и  $y_2 = -\frac{17}{29}$ . Заменувајќи ги добиените вредности за  $y$  ги добиваме соодветните вредности за  $x$ :

$$x_1 = -\frac{-9+5}{2} = 2 \text{ и } x_2 = -\frac{-\frac{51}{29}+5}{2} = -\frac{91}{58}.$$

Според тоа, решенија на дадениот систем се подредените парови

$$(2, -3) \text{ и } \left(-\frac{91}{58}, -\frac{17}{29}\right).$$

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 = 0 \\ 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3)^2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 11 = 0 \end{cases} \text{ и}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) + 5 = 0 \\ 5 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - \left(-\frac{17}{29}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{91}{58}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - 11 = 0 \end{cases}.$$

Како што веќе рековме општиот облик на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати гласи

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Ако во првата равенка ја изразиме едната непозната преку другата, на пример

$$x = -\frac{p+ny}{m},$$

и така добиениот израз за  $x$  го замениме во втората равенка го добиваме системот

$$\begin{cases} x = -\frac{p+ny}{m} \\ a\left(-\frac{p+ny}{m}\right)^2 + b\left(-\frac{p+ny}{m}\right)y + cy^2 + d\left(-\frac{p+ny}{m}\right) + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Погорниот систем е еквивалентен на дадениот, бидејќи е добиен со примена на еквивалентни трансформации. Добиените решенија по  $y$  на втората равенка од системот ги заменуваме во првата равенка од системот. На тој начин ги добиваме соодветните решенија по  $x$ .

**Задача 6.** Решај го системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Од првата равенка на системот добиваме  $x = 10 - y$ . Заменувајќи го добиениот израз за  $x$  во втората равенка на системот ја добиваме равенката

$$(10 - y)^2 + y^2 = 0$$

која е еквивалентна со квадратната равенка

$$y^2 - 10y + 50 = 0$$

чиј корени се

$$y_1 = 5 + 5i \text{ и } y_2 = 5 - 5i.$$

Заменувајќи ги добиените вредности за  $y$  ги добиваме соодветните вредности за  $x$ :

$$x_1 = 5 - 5i \text{ и } x_2 = 5 + 5i.$$

Според тоа, решенијата на дадениот систем се подредените парови

$$(5 - 5i, 5 + 5i) \text{ и } (5 + 5i, 5 - 5i).$$

Проверка:  $\begin{cases} 5 - 5i + 5 + 5i = 10 \\ (5 - 5i)^2 + (5 + 5i)^2 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 5 + 5i + 5 - 5i = 10 \\ (5 + 5i)^2 + (5 - 5i)^2 = 0. \end{cases}$  ♦

**Задача 7.** Решете го системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

**Решение.** Системот има бесконечно многу решенија. ♦

### Задачи

**1.** Решете го системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а)  $\begin{cases} x = 8 - y \\ xy = 15 \end{cases}$ ;      б)  $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$ ;      в)  $\begin{cases} 2(x - 3) = 6(x - y) \\ xy = 4 \end{cases}$ ;  
г)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x^2 - 2y^2 = 10 \end{cases}$ ;      д)  $\begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0. \end{cases}$

**2.** Кои од следниве системи имаат реални решенија, а кои конјугирано комплексни решенија?

а)  $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ ;      б)  $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$ ;      в)  $\begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ ;  
г)  $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 1 - x \end{cases}$ ;      д)  $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2(x - 2)^2 + \frac{1}{3}(y - 3)^2 = -1 \end{cases}$ ;      е)  $\begin{cases} x = 1 + y \\ 3xy = 0. \end{cases}$

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

**1.** Решете ги следниве биквадратни равенки:

а)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ;      б)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ .

**2.** Најди ги корените на следниве биквадратни равенки:

а)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ;      б)  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ .

**3.** Најди го множеството решенија на следниве биквадратни равенки:

а)  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ ;      б)  $x^4 - 32x^2 + 369 = 0$ .

**4.** Скрати ги дробките:

а)  $\frac{y^4 - 3y^2 - 4}{y^2 + 1}$ ;      б)  $\frac{x^4 - x^2 - 20}{x^4 + 3x^2 - 4}$ .



5. Реши ги следните ирационални равенки:

а)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$ ;      б)  $\sqrt{3x-1} + \frac{2}{\sqrt{3x-1}} = \sqrt{5x+3}$ .

6. Најди ги корените на следниве ирационални равенки:

а)  $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} - 3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 2$ ;      б)  $\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2+3}} = 3$ .

7. Образложи зошто следниве равенки немаат решение:

а)  $\sqrt{2x-1} = -5$ ;      б)  $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} = -1$ ;      в)  $\sqrt{1+y} + \sqrt{2+y} = 0$ ;  
г)  $\sqrt{x-6} + \sqrt{5-x} = 3$ ;      д)  $\sqrt{y} = 1 + \sqrt{-1-y}$ ;      е)  $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-4} = 1$ .

8. Реши ги следниве системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а)  $\begin{cases} 2x-1=y \\ 3x^2=4-y^2 \end{cases}$ ;      б)  $\begin{cases} \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y - 12 \\ x^2 + \frac{1}{2} = y^2 - \sqrt{2}xy \end{cases}$ ;

9. Најди ги решенијата на следниве системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а)  $\begin{cases} x+4=z \\ x^2+2z-x=-3z+\frac{1}{2} \end{cases}$ ;      б)  $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+2y^2=3 \end{cases}$ .

## 6. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА, СИСТЕМ И ВКУПНОСТ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

### 6.1. Поим за квадратна функција

#### Реална функција

Нека  $E$  и  $F$  се две непразни подмножества од множеството реални броеви. Ако по некое правило на секој реален број  $x \in E$  му е придружен единствен реален број  $y \in F$ , велиме дека е зададена **реална функција**, накусо **функција** на множеството  $E$  со вредности во множеството  $F$ . Функциите ги означуваме со мали латински букви, на пример  $f, g, h, \dots$

Множеството  $E$  се вика **множество дозволени вредности** за  $x$  или **дефинициона област** на функцијата  $f$  и се означува со  $D_f$ . Подмножеството  $\{f(x) | x \in E\}$  од множеството  $F$  се нарекува **множество вредности** на функцијата  $f$  и се означува со  $V_f$ .

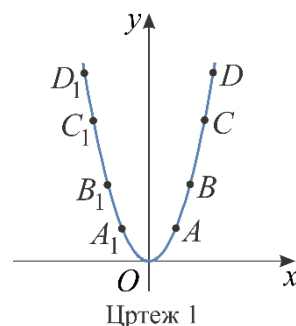
Ако  $f: E \rightarrow F$  е функција тогаш множеството  $G_f = \{(x, f(x)) | x \in E\}$ , кое се разгледува и како подмножество од точки во координатна рамнина, се вика **график** на функцијата  $f$ . За функцијата  $f$  велиме дека е зададена **графички** ако за секој елемент  $(x, f(x))$  од графикот е зададена точка  $P(x, f(x))$  во координатната рамнина.

**Пример 1.** Функцијата  $f(x) = x^2$  е дефинирана на целата реална права. Значи,  $D_f = \mathbb{R}$ . Притоа, заради  $x \geq 0$  за секој  $x \in \mathbb{R}$  важи  $V_f = [0, \infty)$ . Ќе конструираме неколку точки од нејзиниот график, пресметувајќи ги претходно нивните координати чии што вредности ќе ги претставиме во табела:

|        |       |                 |       |                |     |               |     |                |     |
|--------|-------|-----------------|-------|----------------|-----|---------------|-----|----------------|-----|
| $x$    | -2    | $-1\frac{1}{2}$ | -1    | $-\frac{1}{2}$ | 0   | $\frac{1}{2}$ | 1   | $1\frac{1}{2}$ | 2   |
| $f(x)$ | 4     | $2\frac{1}{4}$  | 1     | $\frac{1}{4}$  | 0   | $\frac{1}{4}$ | 1   | $2\frac{1}{4}$ | 4   |
| точки  | $D_1$ | $C_1$           | $B_1$ | $A_1$          | $O$ | $A$           | $B$ | $C$            | $D$ |

Да забележиме дека конструираниите точки не лежат на права (цртеж 1).

Точката  $O(0,0)$  е точка од графикот на функцијата. Понатаму, точките  $A, B, C$  и  $D$  лежат во I квадрант. Како што се зголемуваат нивните апсциси, така редоследно се зголемуваат и нивните ординати. Но притоа, ако зададеме произволни вредности на променливата  $x$  (на пример  $x = 3, 4, \dots, 10, \dots$ ) ќе забележиме дека вредностите на функцијата  $f(x)$



( $f(x) = 9, 16, \dots, 100, \dots$ ) се зголемуваат „многу побрзо“ од соодветните вредности на аргументот. Точките  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  лежат во II квадрант. Тие се симетрични на точките  $A, B, C$  и  $D$  во однос на  $y$ -оската.

Со непрекинато сврзување на избраните точки, го добиваме графикот на

функцијата  $f(x) = x^2$  кој не е права. ♦

### Квадратна функција

Функција од облик

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

каде што  $a$ ,  $b$  и  $c$  се реални броеви,  $a \neq 0$  и  $x$  е независна променлива или аргумент се вика **квадратна функција**. Параметарот  $a$  се нарекува **коэффициент пред  $x^2$**  или **прв коэффициент**, параметарот  $b$  се нарекува **втор** или **среден коэффициент**, а параметарот  $c$  е **слободен член** или **трет** коэффициент на квадратната функција.

Дефиниционата област на квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$  е целото множество реални броеви, односно  $D_f = \mathbb{R}$ .

**Пример 2. а)** Функцијата  $f(x) = x^2$  е квадратна со коефициенти  $a = 1$ ,  $b = 0$  и  $c = 0$ .

**б)** Коефициенти на квадратната функција  $f(x) = -2x^2 + 3$  се  $a = -2$ ,  $b = 0$  и  $c = 3$ .

**в)** Функцијата  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$  е квадратна со коефициенти  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -3$  и  $c = 0$ .

**г)** Квадратната функција  $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + 4$  има коефициенти  $a = -1$ ,  $b = \frac{2}{3}$  и  $c = 4$ . ♦

Нека  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , е дадена квадратна функција. Заради равенството

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

дадената квадратна функција може да ја запишуваме во **каноничен вид**

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Вредноста на реалната променлива  $x = x_0$  за која вредноста на функцијата е еднаква на нула, односно  $f(x_0) = 0$  се вика **нула на функцијата**. Со други зборови, нули на квадратна функција се реалните корени на квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0$$

која ќе ја нарекуваме **квадратна равенка соодветна на квадратната функција**. Како што веќе ни е познато, квадратната равенка  $ax^2 + bx + c = 0$  има реални решенија ако нејзината дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$  е ненегативна. Поточно, кога  $D > 0$ , квадратната равенка има два реални различни корени, а во случајот  $D = 0$  има двоен реален корен. Значи во зависност од дискриминантата на соодветната квадратна равенка, наречена **дискриминанта на квадратната функција**, функцијата  $f(x) = ax^2 + bx + c$  може да има две нули, една нула или, кога  $D < 0$ , да нема нули. Точките од графикот на квадратната функција чија прва координата е нула на функцијата лежат на  $x$ -оската.

**Задача 3.** Да се определат нулите на квадратните функции:

**а)**  $f(x) = x^2 + x - 12$ ; **б)**  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ; **в)**  $f(x) = x^2 + x + 12$ .

**Решение. а)** Дискриминантата на квадратна функција  $D = 1 + 48 > 0$  од каде што следува дека дадената квадратна функција има две реални нули. Тие се корени на соодветната квадратна равенка  $x^2 + x - 12 = 0$ . Според тоа, дадената квадратна функција има две нули  $x_1 = -4$  и  $x_2 = 3$ .

**б)** Дискриминантата на дадената квадратна функција  $D = 0$  од каде што следува дека дадената квадратна функција има една реална нула. Таа е двојниот корен на соодветната квадратна равенка  $x^2 - 4x + 4 = 0$ . Според тоа, дадената квадратна функција има една нула  $x = 2$ .

**в)** Дискриминантата на дадената квадратна функција  $D < 0$  од каде што следува дека дадената квадратна функција нема нули. ♦

Специјално, имаме дека:

**1)** Квадратната функција  $f(x) = ax^2$  има нула во  $x = 0$  од каде што заклучуваме дека нејзиниот график минува низ координатниот почеток.

**2)** Ако коефициентите  $a$  и  $c$  во квадратната функција  $f(x) = ax^2 + c$  имаат ист знак, тогаш функцијата нема нули, додека ако тие се со спротивен знак, таа има две нули

$$\text{во } x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

**3)** Квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx$  има две нули  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{b}{a}$ . Нејзиниот график минува низ координатниот почеток.

### Задачи

**1.** Напиши ги следните квадратни функции во каноничен вид:

**а)**  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ ;    **б)**  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ ;    **в)**  $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ .

**г)**  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ;    **д)**  $f(x) = -(x - \frac{1}{4})^2$ ;    **е)**  $f(x) = (x + 1)(x - 2)$ .

**2.** Најди ги дискриминантите на следните квадратни функции:

**а)**  $f(x) = (x - 3)^2 - \frac{3}{4}$ ;    **б)**  $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$ ;    **в)**  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ .

**3.** Најди ги нулите на квадратните функции:

**а)**  $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ ;    **б)**  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ ;    **в)**  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ .

**г)**  $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$ ;    **д)**  $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 4x + 1$ ;    **е)**  $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ .

## 6.2. Екстремни вредности и интервали на монотоност на квадратна функција

### Екстремни вредности на квадратна функција

**Пример 1.** Да ја разгледаме квадратната функција

$$f(x) = x^2 - 8x + 7.$$

Бидејќи реалните броеви  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 7$  се нули на дадената функција, заклучуваме дека точките  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  се точки од нејзиниот график. Да определиме уште неколку точки од графикот на дадената функција и добиените вредности за нивните координати да ги претставиме во табела:

|        |     |       |    |    |     |    |    |       |
|--------|-----|-------|----|----|-----|----|----|-------|
| $x$    | 0   | 1     | 2  | 3  | 4   | 5  | 6  | 7     |
| $f(x)$ | 7   | 0     | -5 | -8 | -9  | -8 | -5 | 0     |
| точки  | $P$ | $N_1$ |    |    | $T$ |    |    | $N_2$ |

Ако добиените вредности од табелата ги интерпретираме во координатната рамнина, а потоа добиените точки непрекинато ги споиме, ќе го добиеме графикот на дадената квадратна функција. Да забележиме дека за  $x = 4$  вредноста на функцијата  $f(x) = -9$  е помала од вредноста на функцијата за која било друга вредност на независно променливата  $x$ . За дадената функција велиме дека има **минимум (најмала вредност)** во точката  $T(4, -9)$  (цртеж 2).

Ако спроведеме аналогна дискусија за функцијата

$$f(x) = -x^2 + 8x - 7,$$

ќе заклучиме дека за  $x = 4$  вредноста на функцијата  $f(x) = 9$  е поголема од вредноста на функцијата за која било друга вредност на независно променливата  $x$ . Тогаш велиме дека дадената функција има **максимум (најголема вредност)** во точката  $T(4, 9)$  (цртеж 3). ♦

Велиме дека една функција  $f: E \rightarrow F$  има **минимум** во точката  $m \in E$  ако  $f(m) \leq f(x)$  за секое  $x \in E$ . Тогаш координатите на минимумот се  $(m, f(m))$ . Аналогно, велиме дека една функција  $f: E \rightarrow F$  има **максимум** во точката  $n \in E$  ако  $f(n) \geq f(x)$  за секое  $x \in E$  и координатите на минимумот се  $(n, f(n))$ . Ординатите на минимумот, односно максимумот ќе ги нарекуваме **екстремни вредности** на функцијата.

Во продолжение ќе покажеме дека секоја квадратна функција има минимум, или максимум. Од каноничниот вид на функцијата

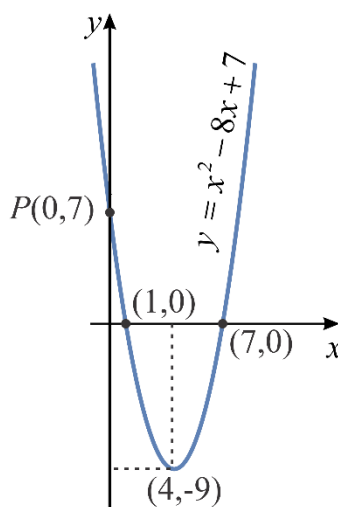
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

добиваме дека

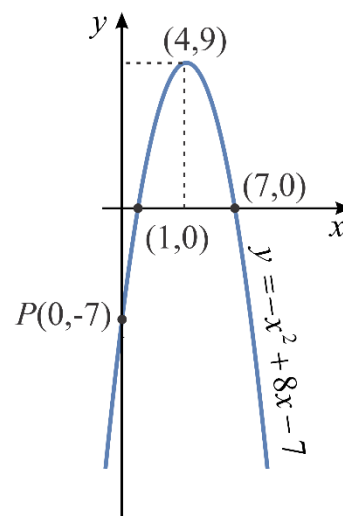
$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Бидејќи, за секој реален број  $x$ ,  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ , знакот на изразот  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  зависи само од знакот на коефициентот  $a$ . Да ги разгледаме следниве два случаи:

**а)** За  $a > 0$  изразот  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  е ненегативен, за секој реален број  $x$ . Притоа, за  $x = -\frac{b}{2a}$ , тој има најмала вредност која е еднаква на нула. Според тоа, вредноста на



Цртеж 2



Цртеж 3

изразот  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  има најмала вредност за  $x = -\frac{b}{2a}$  и таа изнесува  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , односно,  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ .

Значи, квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , за  $a > 0$ , има **минимум**

$$\frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ кој се постигнува за } x = -\frac{b}{2a}.$$

**6)** За  $a < 0$  изразот  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ , за секој реален број  $x$ , а за  $x = -\frac{b}{2a}$  има најголема вредност, еднаква на нула. Според тоа, вредноста на изразот  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  е најголема за  $x = -\frac{b}{2a}$  и таа е  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , односно,  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ .

Значи, квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , за  $a < 0$ , има **максимум**

$$\frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ кој се постигнува за } x = -\frac{b}{2a}.$$

Точката  $T = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  се вика **теме** на дадената квадратна функција.

**Пример 2. а)** Квадратната функција  $f(x) = x^2 - 8x + 12$ , за  $x = 4$  има минимум  $f(x) = -4$ . Според тоа, имаме дека  $T = T(4, -4)$ .

**6)** Квадратната функција  $f(x) = -x^2 + x + 6$ , за  $x = \frac{1}{2}$  има максимум  $f(x) = \frac{25}{4}$ .

Според тоа  $T = T\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ . ♦

Специјално, имаме дека

**1)** Квадратната функција

$$f(x) = ax^2,$$

за  $a > 0$  има минимум за  $x = 0$ , односно  $T(0, 0)$ . Ако  $a < 0$ , дадената функција има максимум за  $x = 0$  и  $T(0, 0)$ .

**2)** Квадратната функција

$$f(x) = ax^2 + c,$$

за  $a > 0$  има минимум за  $x = 0$ , односно  $T(0, c)$ . Ако  $a < 0$ , дадената функција има максимум за  $x = 0$  и  $T(0, c)$ .

**3)** Квадратната функција

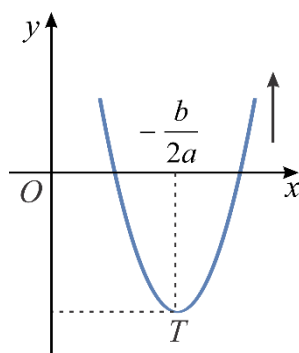
$$f(x) = ax^2 + bx,$$

за  $a > 0$  има минимум за  $x = -\frac{b}{2a}$ , односно  $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ . Ако  $a < 0$ , дадената

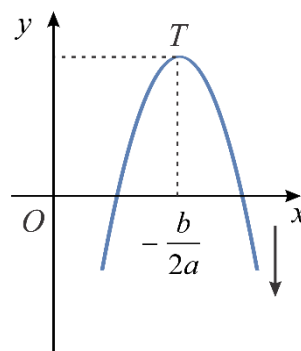
функција има максимум за  $x = -\frac{b}{2a}$  и  $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ .

## Интервали на монотоност на квадратна функција

Нека е дадена квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .



Цртеж 4



Цртеж 5

Ако  $a > 0$ , тогаш квадратната функција опаѓа на интервалот  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  и расте на интервалот  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  (цртеж 4).

Ако  $a < 0$ , тогаш квадратната функција расте на интервалот  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  и опаѓа на интервалот  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  (цртеж 5).

Интервалите  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  и  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  се нарекуваат **интервали на монотоност**.

**Пример 3. а)** Квадратната функција  $f(x) = x^2 - 8x + 12$ , за  $x = 4$  има минимум  $f(x) = -4$ . Според тоа, имаме дека таа опаѓа на интервалот  $(-\infty, 4)$ , и расте на интервалот  $(4, +\infty)$ .

**б)** Квадратната функција  $f(x) = -x^2 + x + 6$ , за  $x = \frac{1}{2}$  има максимум  $f(x) = \frac{25}{4}$ . Според тоа, имаме дека таа расте на интервалот  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ , опаѓа на интервалот  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . ♦

### Задачи

**1.** Најди за која вредност на променливата  $x$ , следните квадратни функции имаат минимум (односно максимум) и најди ја неговата вредност:

**а)**  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ ; **б)**  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ ; **в)**  $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ .

**г)**  $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$ ; **д)**  $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 4x + 1$ ; **е)**  $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ .

**2.** Најди ги координатите на темињата на следните квадратни функции:

**а)**  $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ ; **б)**  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ ; **в)**  $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ ;

**г)**  $f(x) = (x - 3)^2 - \frac{3}{4}$ ; **д)**  $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$ ; **е)**  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ .

3. Најди ги интервалите на монотоност на следните квадратни функции:

а)  $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ ; в)  $f(x) = (x-2)(x-3)$ ;

г)  $f(x) = (x-3)^2 - \frac{3}{4}$ ; д)  $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$ ; е)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ .

4. Дали постои квадратна функција која за  $x=0$  има максимум  $f(x)=4$ , а точката  $A(2,2)$  припаѓа на нејзиниот график?

### 6.3. График на квадратна функција

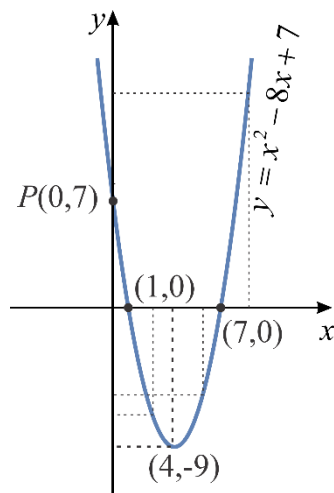
**Пример 1.** Да ја разгледаме повторно квадратната функција

$$f(x) = x^2 - 8x + 7.$$

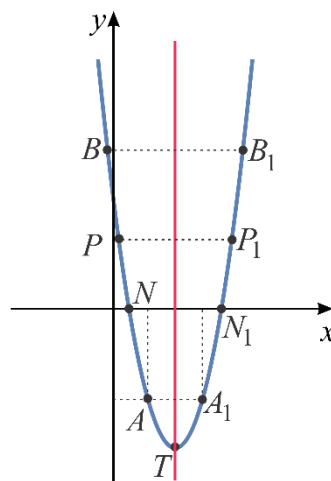
Табелата на вредности во некои вредности на променливата  $x$  е:

|        |     |       |    |    |     |    |    |       |
|--------|-----|-------|----|----|-----|----|----|-------|
| $x$    | 0   | 1     | 2  | 3  | 4   | 5  | 6  | 7     |
| $f(x)$ | 7   | 0     | -5 | -8 | -9  | -8 | -5 | 0     |
| точки  | $P$ | $N_1$ |    |    | $T$ |    |    | $N_2$ |

Дадената функција има нули за  $x_1=1$  и  $x_2=7$ . Нејзиното теме е во точката  $T = T(4, -9)$ . Ако ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во таблицата, ќе го добиеме приближниот график на дадената квадратна функција како на цртеж 6. ♦



Цртеж 6



Цртеж 7

Во општ случај графикот на една квадратна функција како подмножество од координатната рамнина е крива линија која се нарекува **парабола**. Точката  $T$  се вика **теме** на параболата.

**Пример 2.** Повторно, нека  $f(x) = x^2 - 8x + 7$ . Од табелата забележуваме дека за некои вредности на променливата  $x$ , вредностите на функцијата се еднакви. Така на пример,  $f(1) = f(7)$ ,  $f(2) = f(6)$ ,  $f(3) = f(5)$ . Апсцисите на овие точки се симетрични во однос на апсцисата на темето на параболата. Бидејќи  $f(4-t) = t^2 - 9$  и



$f(4+t) = t^2 - 9$ , за секој реален број  $t$ , следува дека  $f(4-t) = f(4+t)$ , за секој реален број  $t$ . Да ги воочиме на графикот на функцијата точките со координати  $(4-t, f(4-t))$  и  $(4+t, f(4+t))$ . Овие две точки се симетрични во однос на правата  $s$  која минува низ темето на квадратната функција и е паралелна на  $y$  – оската. Оваа права се вика оска на параболата. Така на цртеж 7 точките  $A$ ,  $N$ ,  $P$  и  $B$  се редоследно симетрични на точките  $A_1$ ,  $N_1$ ,  $P_1$  и  $B_1$ , во однос на правата  $s$ . ♦

Нека е дадена квадратната функција  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  и нека  $t$  е произволен реален број. Вредноста на функцијата во  $x = -\frac{b}{2a} - t$  е

$f\left(-\frac{b}{2a} - t\right) = at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Аналогно, вредноста на функцијата во  $x = -\frac{b}{2a} + t$  изнесува  $f\left(-\frac{b}{2a} + t\right) = at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

Според тоа, точките

$$\left(-\frac{b}{2a} - t, at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \text{ и } \left(-\frac{b}{2a} + t, at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

од графикот на квадратната функција се симетрични во однос на правата  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Со други зборови, графикот на функцијата

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

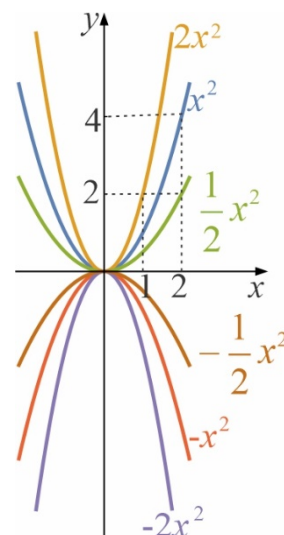
е **осносиметричен** во однос на правата  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Графикот на секоја квадратна функција може да го нацртаме и со translација на графици на поедноставни квадратни функции. Претходно го нацртаме графикот на функцијата  $f(x) = x^2$ . Со негова помош ќе го нацртаме графикот на секоја квадратна функција.

**График на функцијата**  $f(x) = ax^2$ .

Нека  $a$  е реален број, различен од 0. Точката со координати  $(x, x^2)$  припаѓа на графикот на  $f(x) = x^2$  (Пример 1), додека точката со координати  $(x, ax^2)$  припаѓа на графикот на функцијата  $f(x) = ax^2$ . Значи графикот на функцијата  $f(x) = ax^2$  можеме да го добиеме со множење на ординатите на точките од графикот на  $f(x) = x^2$  со реалниот број  $a$ .

**Пример 3.** На цртежот десно, на во ист координатен систем, се претставени графици на следниве функции:



$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 2x^2, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

$$f_4(x) = -x^2, \quad f_5(x) = -2x^2, \quad f_6(x) = -\frac{1}{2}x^2. \quad \blacklozenge$$

Забележуваме дека за  $0 < a \leq 1$  важи  $0 \leq ax^2 < x^2$ , а за  $a > 1$  важи  $ax^2 > x^2$ , за секој реален број  $x$ . Според тоа графикот на функцијата  $f(x) = ax^2$  е „поширок“ од графикот на  $f(x) = x^2$  за  $0 < a \leq 1$ , а „потесен“ за  $a > 1$ . Аналогни својства важат за  $a < 0$ .

Ако точката  $(x, ax^2)$  припаѓа на графикот на  $f(x) = ax^2$ , тогаш заради  $a(-x)^2 = ax^2$  добиваме дека и точката  $(-x, ax^2)$  припаѓа на графикот на  $f(x) = ax^2$ . Точките  $(x, ax^2)$  и  $(-x, ax^2)$  се осно симетрични во однос на  $y$  оската. Бидејќи ова важи за секој реален број  $x$  следува дека графикот на  $f(x) = ax^2$  е осно симетричен во однос на  $y$  оската.

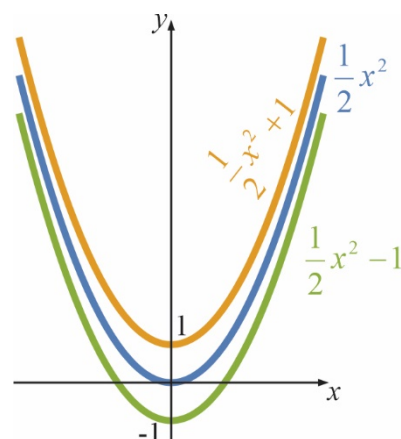
### График на функцијата $f(x) = ax^2 + c$ .

Нека  $c \in \mathbb{R}$ . Ако точката  $(x, ax^2)$  припаѓа на графикот на  $f_1(x) = ax^2$ , тогаш  $(x, ax^2 + c)$  припаѓа на графикот на  $f(x) = ax^2 + c$ . Бидејќи ова важи за секој реален број  $x$ , следува дека графикот на  $f(x) = ax^2 + c$  може да се нацрта со поместување на графикот на  $f_1(x) = ax^2$  за  $|c|$  единици по  $y$  оската.

**Пример 4.** На цртежот на ист координатен систем, претставени се графиците на функциите

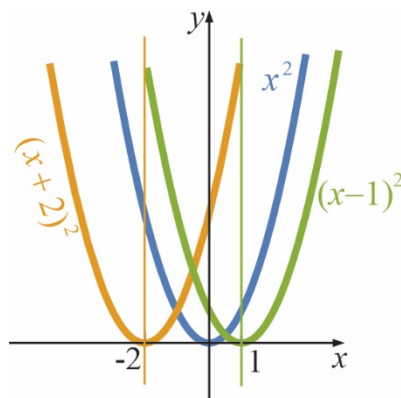
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1. \quad \blacklozenge$$

Да забележиме дека ако  $c < 0$ , графикот на функцијата  $f(x) = ax^2 + c$  е поместен „надолу“ во правец на  $y$  оската, а ако  $c > 0$  е поместен „нагоре“. Графикот на функцијата  $f(x) = ax^2 + c$  е осно симетричен во однос на  $y$  оската.



### График на функцијата $f(x) = a(x - \alpha)^2$ .

Нека  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ако точката  $(x, ax^2)$  припаѓа на графикот на функцијата  $f_1(x) = ax^2$ , тогаш  $(x, f(x - \alpha)) = (x, a(x - \alpha)^2)$  припаѓа на графикот на  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  и притоа важи  $ax^2 = a(x - \alpha + \alpha)^2$ . Според тоа, графикот на  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  се добива со поместување (транслација) на графикот на  $f_1(x) = ax^2$  за  $|\alpha|$  единици во правец на  $x$  оската. Притоа, ако  $\alpha > 0$  поместувањето е налево а ако  $\alpha < 0$  поместувањето е надесно.



**Пример 5.** На цртежот на ист координатен систем, претставени се графици на функциите  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = (x+2)^2$ ,  $f_3(x) = (x-1)^2$ . ♦

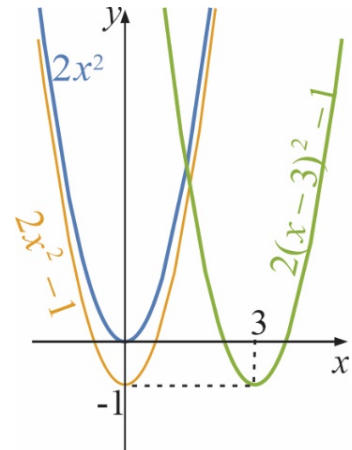
Ако  $f(x) = a(x-\alpha)^2$  и  $d \in \mathbb{R}$  важи

$$f(\alpha-d) = a(\alpha-d-\alpha)^2 = ad^2 = a(\alpha+d-\alpha)^2 = f(\alpha+d)$$

па следува дека графикот на функцијата  $f(x) = a(x-\alpha)^2$  е осно симетричен во однос на правата која е паралелна со  $y$  оската и чии точки имаат координати  $(-\alpha, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

**График на функцијата**  $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ .

Слично како и претходно, графикот на функцијата  $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$  го добиваме со поместување на графикот на  $f_1(x) = ax^2$  за  $|\alpha|$  единици во правец на  $x$  оската и  $|\beta|$  единици по  $y$  оската. Графикот на оваа функција е осно симетричен во однос на правата која е паралелна со  $y$  оската и чии точки имаат координати  $(-\alpha, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .



**Пример 6.** На цртежот на ист координатен систем, претставени се графици на функциите

$$f(x) = 2x^2, \quad f(x) = 2x^2 - 1, \quad f(x) = 2(x-3)^2 - 1. \quad \blacklozenge$$

**График на функцијата**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Нека  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , е дадена квадратна функција. Заради равенството

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

дадената квадратна функција може да ја запишеме во **каноничен вид**

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

На тој начин цртањето на графикот на оваа функција се сведува на цртање на графикот на  $ax^2$ , негова транслација за  $\left|\frac{b}{2a}\right|$  единици по  $x$  оската и транслација на добиениот график за  $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|$  единици во правец на  $y$  оската, на начинот опишан претходно. Значи, цртањето на графикот на функцијата  $f(x) = ax^2 + bx + c$  се сведува на цртање на функција од видот  $f_1(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ .

## Задачи

1. Нацртај ги графици на следните функции:

а)  $f(x) = -(x-1)^2$ ;      б)  $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 1$ ;      в)  $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ .

$$\text{г)} f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 \quad \text{д)} f(x) = -(x-\frac{1}{4})^2; \quad \text{ѓ)} f(x) = (x+1)(x-2).$$

## 6.4. Знак на квадратна функција

Во овој дел ќе го разгледаме прашањето за кои вредности на променливата  $x$ , квадратната функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$  има позитивна, односно негативна вредност. За таа цел ќе ги разгледаме следниве три случаи:

**1.** Дискриминантата на квадратната функција е позитивна ( $D > 0$ ).

Во овој случај, соодветната квадратна равенка има два реални корени,  $x_1$  и  $x_2$ . Тогаш квадратната функција може да ја запишеме како

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

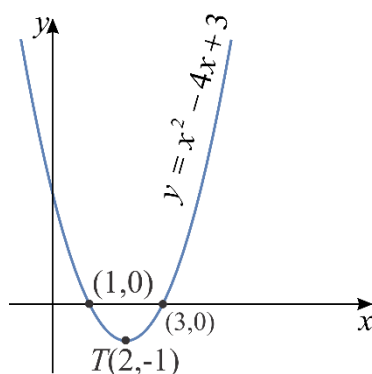
Без губење на општоста може да сметаме дека  $x_1 < x_2$ .

**а)** Нека  $x < x_1$ . Тогаш и  $x < x_2$ , па производот  $(x-x_1)(x-x_2)$  е позитивен. Затоа, знакот на квадратната  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  е ист со знакот како и коефициентот  $a$ .

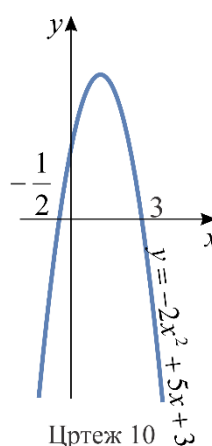
Според тоа, кога  $D > 0$ , вредноста на квадратната функција е позитивна за секој  $x < x_1$  кога  $a > 0$ , а е негативна за секој  $x < x_1$  кога  $a < 0$ .

**б)** Нека  $x_1 < x < x_2$ . Тогаш производот  $(x-x_1)(x-x_2)$  е негативен. Затоа знакот на  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  е спротивен со знакот на коефициентот  $a$ . Значи, ако  $D > 0$ , вредноста на функцијата е негативна за секој  $x_1 < x < x_2$  кога  $a > 0$ , а е позитивна за секој  $x_1 < x < x_2$  кога  $a < 0$ .

**в)** Нека  $x_2 < x$ . Тогаш и  $x_1 < x$ , па производот  $(x-x_1)(x-x_2)$  е позитивен. Затоа, знакот на  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  е ист со знакот на коефициентот  $a$ . Значи ако  $D > 0$ , вредноста на функцијата е позитивна за секој  $x_2 < x$  кога  $a > 0$ , а е негативна за секој  $x_2 < x$  кога  $a < 0$ .



Цртеж 9



Цртеж 10

**Пример 1. а)** Квадратната функција  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  е позитивна за секој  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ , а е негативна за секој  $x \in (1, 3)$  (цртеж 9).

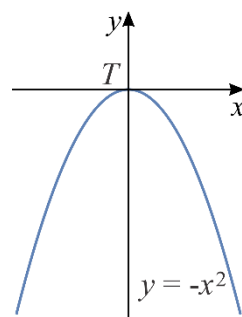
**6)** Квадратната функција  $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$  е негативна за секој реален број  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$ , а позитивна за  $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$  (цртеж 10). ♦

**II.** Дискриминантата на квадратната функција е еднаква со нула ( $D = 0$ ).

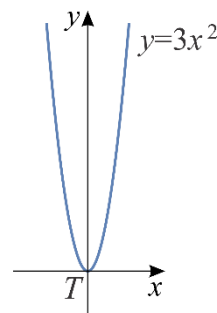
Во овој случај, соодветната квадратната равенка има еден реален корен  $x_1$ . Тогаш, квадратната функција може да ја запишеме во облик  $f(x) = a(x - x_1)^2$ . Бидејќи  $(x - x_1)^2 > 0$  за секое  $x$  освен за  $x = x_1$ , знакот на  $f(x) = a(x - x_1)^2$  е ист со знакот на коефициентот  $a$ .

Значи, ако  $D = 0$ , вредноста на функцијата е негативна за секој реален број  $x$  освен за  $x = x_1$ , кога  $a < 0$ , а е позитивна за секој реален број  $x$  освен за  $x = x_1$ , кога  $a > 0$ .

**Пример 2.** Функцијата  $f(x) = 3x^2$  е позитивна за сите  $x \neq 0$ , а  $f(x) = -x^2$  е негативна за секое  $x \neq 0$ . Нивните графици се прикажани на цртеж 11 и цртеж 12, соодветно. ♦



Цртеж 11



Цртеж 12

**III.** Дискриминантата на квадратната функција е негативна ( $D < 0$ ).

Квадратната функција ќе ја запишеме во каноничен вид

$$f(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

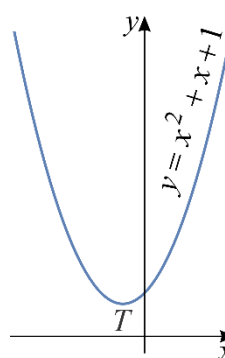
Бидејќи  $D = b^2 - 4ac < 0$  и  $4a^2 > 0$  заклучуваме дека  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ , односно

$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ , за секој реален број  $x$ . Затоа, знакот на функцијата

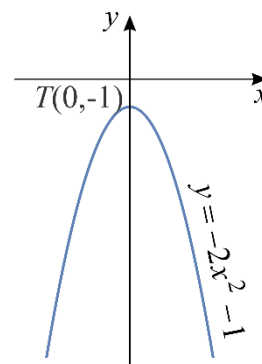
$f(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$  е ист со знакот на коефициентот  $a$ .

Значи, ако  $D < 0$ , вредноста на функцијата е негативна за секој реален број  $x$  кога  $a < 0$ , а е позитивна за секој реален број  $x$  кога  $a > 0$ .

**Пример 3. а)** Да го одредиме знакот на функцијата  $f(x) = x^2 + x + 1$ . Во овој случај  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ . Значи, квадратната функција за секој реален број  $x$  е позитивна. Нејзиниот график е прикажан на цртеж 13.



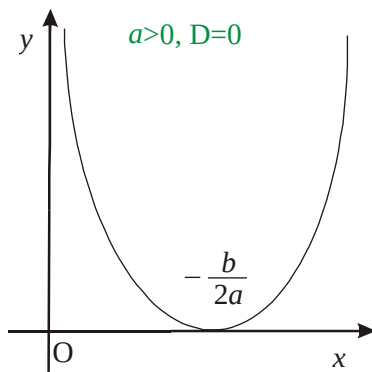
Цртеж 13



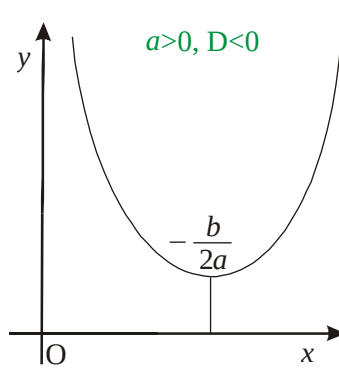
Цртеж 14

**6)** Квадратната функција  $f(x) = -2x^2 - 1$  има негативна дискриминанта. Бидејќи  $a = -2 < 0$ , следува дека таа е негативна за секој реален број  $x$ . Нејзиниот график е прикажан на цртеж 14

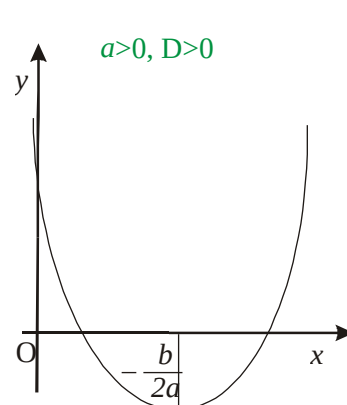
Од претходната дискусија следува дека за квадратна функција се можни следните облици на нивните графици (цртеж 15 - цртеж 20).



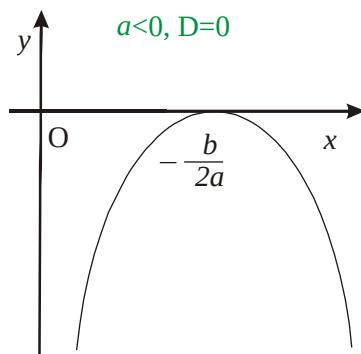
Цртеж 15



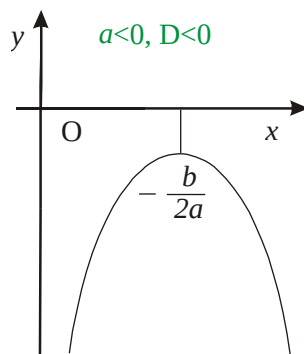
Цртеж 16



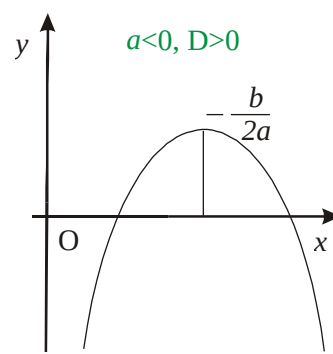
Цртеж 17



Цртеж 18



Цртеж 19



Цртеж 20

### Задачи

1. Најди го знакот на следните квадратни функции:

а)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ ; б)  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ ; в)  $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ .

2. За кои вредности на променливата  $x$ , квадратните функции

а)  $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ ; б)  $f(x) = -(x+6)^2 - 4$ ; в)  $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x+1)$ ;

имаат позитивна вредност?

3. Каков знак има квадратната функција  $f(x) = x^2 - 11x + 28$  во интервалот:

а)  $(-5, 0)$ ; б)  $(2, 5)$ ; в)  $(6, 9)$ ; г)  $(12, 20)$  ?

4. Конструирај го графикот на следните квадратни функции:

а)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ; б)  $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ ; в)  $f(x) = 5x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ ;

$$\text{г)} f(x) = -(x-3)^2 - 3; \quad \text{д)} f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5; \quad \text{ѓ)} f(x) = -x^2 + 4x - 4.$$

## 6.5. Квадратна неравенка со една непозната

### Поим за квадратна неравенка

Во I година се запозна со поимите: неравенка, дефиниционо множество на неравенка, решение на неравенка, еквивалентни неравенки и со соодветните трансформации кои една неравенка ја трансформираат во еквивалентна на неа неравенка. Овде ќе ги разгледаме и ќе ги испитае квадратните неравенки со една непозната.

Како што веќе рековме, равенка од втор степен со една непозната се нарекува **квадратна неравенка со една непозната**, накусо **квадратна неравенка**.

**Пример 1. а)** Неравенката  $3x + 2 > -3$  е линеарна неравенка со една непозната;

**б)** Неравенката  $x^2 + 2x + 2 \geq 0$  е квадратна неравенка со една непозната;

**в)** Неравенката  $3x + 5 < 2x + 4y$  е линеарна неравенка со две непознати;

**г)** Неравенката  $x^2 + 2x + y^2 \geq 0$  е квадратна неравенка со две непознати. ♦

**Пример 2.** Квадратните неравенки  $2 > \frac{1}{x^2}$  и  $2x^2 > 1$  се еквивалентни на множеството позитивни реални броеви, но не се еквивалентни на целото множество реални броеви. ♦

**Пример 3.** Квадратната неравенка  $x - x^2 + 7 > 3 - x^2$  е еквивалентна со неравенката  $x + 7 > 3$ , која е линеарна. ♦

**Пример 4.** Квадратната неравенка  $4x^2 - 5 > 3x - 2$  е еквивалентна со неравенката  $4x^2 - 3x + 3 > 0$ . ♦

Да се реши квадратна неравенка значи да се определи множеството решенија на неравенката, односно да се определат сите вредности на непознатата за кои неравенката преминува во точно бројно неравенство, или да се утврди дека таа нема решение.

За да решиме дадена квадратна неравенка, истата ја трансформираме во друга поедноставна но еквивалентна на неа, додека не дојдеме до наједноставната неравенка чие множество решенија е очевидно. Со соодветни трансформации секоја квадратна неравенка со една непозната се доведува до еквивалентна на неа неравенка од видот

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (или } ax^2 + bx + c \geq 0), \quad a \neq 0,$$

наречен **општ вид** на квадратна неравенка со една непозната, каде што  $a$ ,  $b$  и  $c$  се реални броеви, наречени коефициенти на неравенката. Притоа коефициентот  $a$  се вика **прв коефициент** или коефициент пред  $x^2$ , коефициентот  $b$  се вика **втор** или **среден коефициент**, а коефициентот  $c$  **трет коефициент** или **слободен член**.

**Пример 5. а)** Неравенката  $3x^2 - 4x + 2 > 0$  е квадратна со коефициенти  $a = 3$ ,  $b = -4$  и  $c = 2$ .

**б)** Неравенката  $x^2 - 3x + 1 < 0$  е квадратна со коефициенти  $a = 1$ ,  $b = -3$  и  $c = 1$ .

**в)** Неравенката  $x^2 - 3 \geq 0$  е квадратна неравенка со коефициенти  $a = 1$ ,  $b = 0$  и  $c = -3$ . ♦

**Пример 6.** Неравенката  $x^2 + x - 1 < 0$  е еквивалентна со неравенката  $-x^2 - x + 1 > 0$ . ♦

**Внимание:** Кога двете страни на една неравенка ќе се помножат со некој израз,

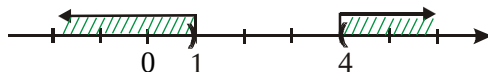
треба да се внимава и да се разгледуваат случаите кога тој израз е позитивен, кога е негативен, а кога е еднаков на нула.

### Решавање на квадратни неравенки со помош на соодветната квадратна функција

Да го определиме множеството решенија на квадратната неравенка од облик  $ax^2 + bx + c > 0$ .

Ако ја разгледаме соодветната квадратна функција  $y = ax^2 + bx + c$ , тогаш решавањето на дадената неравенка преминува во барање одговор на прашањето кога квадратната функција е позитивна (решавањето на  $ax^2 + bx + c \geq 0$  би значело решавање на проблемот кога функцијата  $y = ax^2 + bx + c$  е позитивна или еднаква на нула). Со други зборови, наоѓањето на множеството решенија на дадена квадратна неравенка се сведува на определување на знакот на соодветната квадратна функција. Множеството решенија може да го претставуваме графички, прецртувајќи го делот од бројната оска на кој лежат точките кои соодветствуваат на решенијата на квадратната неравенка.

**Задача 7.** Решај ја квадратната неравенка  $x^2 - 5x + 4 > 0$ .



Цртеж 21

**Решение.** Во овој случај дискриминантата на соодветната квадратна функција  $y = x^2 - 5x + 4$  е  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$ . Квадратната функција има две реални различни нули:  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 4$ .

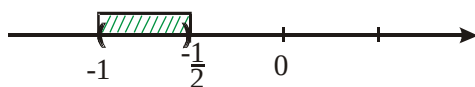
Бидејќи, коефициентот пред  $x^2$  е позитивен, функцијата  $y = x^2 - 5x + 4$  ќе биде позитивна за секое  $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ . Според тоа, множеството решенија е  $R = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ , прикажано на цртеж 21. ♦

**Задача 8.** Решај ја квадратната неравенка  $x^2 - x + 4 > 0$ .

**Решение.** Дискриминанта на квадратната функција  $y = x^2 - x + 4$  гласи  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$ , а коефициентот пред  $x^2$  е позитивен. Затоа, квадратната функција е позитивна за секој реален број  $x$ , односно множеството решенија на дадената неравенка е множеството реални броеви. Според тоа, оваа неравенка е идентично неравенство. ♦

**Задача 9.** Решај ја квадратната неравенка  $2x^2 + 3x + 1 < 0$ .

**Решение.** Дискриминантата на квадратната функција  $y = 2x^2 + 3x + 1$  е  $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ , па според тоа квадратната функција има две реални, различни нули  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -\frac{1}{2}$ .



Цртеж 22



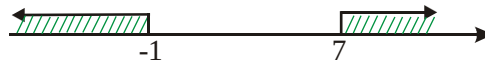
Бидејќи првиот коефициент е позитивен, соодветната квадратна функција е негативна за секое  $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ , односно множеството решенија на дадената неравенка е  $R = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ , кое е прикажано на цртеж 22. ♦

**Задача 10.** Реши ја квадратната неравенка  $x^2 - 10x + 25 > 0$ .

**Решение.** Дискриминантата на квадратната функција  $y = x^2 - 10x + 25$  е  $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$ , а првиот коефициент е позитивен, па таа е позитивна за секој реален број  $x \neq 5$ . Значи, множеството решенија на дадената квадратна неравенка е  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ . ♦

**Задача 11.** Реши ја квадратната неравенка  $x^2 - 6x - 7 \geq 0$ .

**Решение.** Дискриминантата на квадратната функција  $y = x^2 - 6x - 7$  е  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) > 0$ . Тогаш квадратната функција има две реални различни нули:  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 7$ .



Цртеж 23

Бидејќи, коефициентот пред највисокиот степен на непознатата е позитивен, соодветната квадратна функција  $y = x^2 - 6x - 7$  е позитивна или еднаква на нула за секое  $x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$ . Затоа множеството решенија на дадената квадратна неравенка е  $R = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$ , прикажано графички на цртеж 23. ♦

**Задача 12.** Реши ја квадратната неравенка  $-x^2 + 2x - 2 > 0$ .

**Решение.** Дискриминантата на квадратната функција  $y = -x^2 + 2x - 2$  е  $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -4 < 0$ , а коефициентот пред највисокиот степен на непознатата е негативен. Тогаш соодветната квадратна функција е негативна за секое  $x$ . Затоа, множеството решенија на неравенката  $-x^2 + 2x - 2 > 0$  е празното множество, односно  $R = \emptyset$ . ♦

### Задачи

1. Најди го бројот на непознатите во следните неравенки:

- а)  $x + 2 > 3$ ;                      б)  $x^2 + 3x \leq 4x - 7$ ;  
в)  $x + 2y < 3$ ;                      г)  $x + 2yz + 3z > 0$ .

2. Најди го степенот на следните неравенки:

- а)  $3x + 2 > -1$ ;                      б)  $3x^2 - 7x \geq 4x - 1$ ;  
в)  $x^5 + 12x^3 < 2x$ ;                      г)  $3x^3y + 2yz^2 < 3xyz$ .

3. Трансформирај ги до облик  $R(x) > 0$  следните квадратни неравенки:

- а)  $3x^2 + 2 > 3x$ ;                      б)  $4(x^2 - 2) > 8$ ;  
в)  $\frac{x^2 + 9}{4} - x < x + 1$ ;                      г)  $x^2 - \frac{1}{2}x < 2 - \frac{1}{3}x^2 - 3$ .

4. Провери дали  $x = 3$  е решение на квадратната неравенка:

- а)  $x^2 - 1 > 2x$ ;                      б)  $3(x^2 - 2x + 1) \geq 8$ ;

$$\text{в)} \frac{5x^2 - 9}{3} - 2x \leq \frac{x+3}{4}; \quad \text{г)} 1 - \frac{2}{x^2 - 9} < \frac{1}{x+3}.$$

5. Реши ги следниве квадратни неравенки:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 9x^2 - 12x + 4 \leq 0; & \text{б)} 49x^2 + 42x + 9 > 0; \\ \text{в)} 36x^2 - 60x + 25 < 0; & \text{г)} 81x^2 + 36x + 4 \geq 0; \\ \text{д)} -x^2 + 5x + 14 \geq 0; & \text{ф)} -2x^2 + 11x + 63 < 0. \end{array}$$

6. Кои од следните квадратни неравенки се идентички неравенства, а за кои множеството решенија е празното множество?

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \geq x - 4; & \text{б)} x^2 + 1 \leq 0; \\ \text{в)} (x-4)(x+4) > x^2 - 4; & \text{г)} \left(x + \frac{1}{2}\right) > x(x+1) + \frac{3}{4}. \end{array}$$

## 6.6. Решавање квадратни неравенки со разложување

Нека е дадена квадратната неравенка

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Триномот  $ax^2 + bx + c$  се вика соодветен квадратен трином на дадената квадратна неравенка. До множеството решенија на дадена квадратна неравенка може да дојдеме и со разложување на соодветниот квадратен трином на линеарни множители, односно

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

каде што  $x_1$  и  $x_2$  се реалните корени на соодветниот квадратен трином. Тогаш решавањето се засновува на следниве две тврдења кои важат за реалните броеви:

$$\begin{array}{l} A \cdot B > 0 \text{ ако и само ако } (A > 0 \text{ и } B > 0) \text{ или } (A < 0 \text{ и } B < 0) \\ A \cdot B < 0 \text{ ако и само ако } (A > 0 \text{ и } B < 0) \text{ или } (A < 0 \text{ и } B > 0). \end{array}$$

Така, проблемот на решавање на дадена квадратна неравенка го сведуваме на проблем на разложување на квадратниот трином на множители, а потоа со помош на горните тврдења, на решавање систем линеарни неравенки со една непозната.

**Задача 1.** Реши ја квадратната неравенка  $2x^2 - x - 10 < 0$ .

**Решение.** Бидејќи  $2x^2 - x - 10 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2)$ , дадената неравенка е еквивалентна на неравенката  $2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2) < 0$ , односно  $\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2) < 0$ . Применувајќи ги горните тврдења ја добиваме следнава еквиваленција:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{5}{2} > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{5}{2} < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right\}.$$

Множеството решенија на првиот систем е празното множество, додека множеството решенија на вториот систем е интервалот  $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ . Унијата на двете множества

решенија е интервалот  $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ , кој е и множеството решенија на дадената квадратна неравенка. ♦

**Задача 2.** Реши ја неравенката  $\frac{x+1}{x-1} > 2$ .

**Решение.** Дадената неравенка ја запишуваме во видот  $\frac{x+1}{x-1} - 2 > 0$ , односно  $\frac{-x+3}{x-1} > 0$ . Последната неравенка ќе ја сведеме на квадратна неравенка. Имено, ако двете страни на неравенката ги помножимо со  $(x-1)^2$ , за  $x \neq 1$ , ја добиваме еквивалентната неравенка  $(-x+3)(x-1) > 0$ , односно  $(x-3)(x-1) < 0$  чие множество решенија е интервалот  $(1,3)$ .

Неравенката од претходниот пример може да ја решиме и со користење на следните тврдења кои важат за реалните броеви:

$$\frac{A}{B} > 0 \text{ ако и само ако } (A > 0 \text{ и } B > 0) \text{ или } (A < 0 \text{ и } B < 0)$$

$$\frac{A}{B} < 0 \text{ ако и само ако } (A > 0 \text{ и } B < 0) \text{ или } (A < 0 \text{ и } B > 0).$$

### Задачи

1. За кои вредности на  $x$  триномот  $3x^2 - x - 4$  има

- а) позитивна вредност; б) негативна вредност;  
в) вредност еднаква на нула?

2. Реши ги следните квадратни неравенки:

- а)  $x^2 - 4 < 0$ ; б)  $9 - x^2 \leq 0$ ; в)  $x^2 + 1 \leq 0$ ;  
г)  $x^2 + 3 > 0$ ; д)  $x^2 - 7x + 12 > 0$ ; ѓ)  $x^2 + 3x - 40 > 0$ .

3. Најди го множеството решенија на следниве квадратни неравенки:

- а)  $\frac{x^2 + 7}{2} < 4x$ ; б)  $(x-1)^2 > -3x + \frac{x-1}{2}$ ;  
в)  $\frac{x-3}{2} - x < \frac{x(x+2)}{3} - 1$ ; г)  $x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{x}{2} + 12$ ;  
д)  $\frac{x}{5} - 1 > \frac{1}{3}x(2x-1)$ ; ѓ)  $\frac{3x-1}{2} - 2x < \frac{x^2 + 4x}{2} - 1$ .

4. Реши ги следниве неравенки:

- а)  $\frac{x-3}{x+1} > 0$ ; б)  $\frac{1-4x}{x-4} < 0$ ; в)  $\frac{4x-2}{2x+1} \leq 0$ ;  
г)  $\frac{3x+13}{x} \geq 4$ ; д)  $\frac{x-3}{x} \geq -3$ ; ѓ)  $1 - \frac{x-2}{2x+1} < -\frac{1}{2}x$ .

## 6.7. Систем и вкупност од две квадратни неравенки со една непозната

Во овој дел ќе ги воведеме поимите за систем од две квадратни неравенки и вкупност од две квадратни неравенки со една непозната.

### Систем од квадратни неравенки

Множеството од две квадратни неравенки со една иста непозната се вика **систем квадратни неравенки со една непозната**.

**Решение** на систем од квадратни неравенки со една непозната е секоја вредност на непознатата  $x = x_0$ , која е решение на секоја од неравенките во системот. Множеството решенија на даден систем квадратни неравенки со една непозната се состои од заедничките решенија на секоја од неравенките во системот, односно од пресекот на множествата решенија на неравенките во системот. Да се реши даден систем квадратни неравенки со една непозната значи да се определи множеството решенија.

Два системи квадратни неравенки со една непозната се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Ако една од неравенките во системот ја замениме со неравенка еквивалентна на неа добиваме, систем еквивалентен на дадениот.

Од теоремите за еквивалентни неравенки, секој систем од две квадратни неравенки со една непозната е еквивалентен на систем од видот

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases}, \left( \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0 \end{cases} \right),$$

наречен **општ облик на систем од две квадратни неравенки со една непозната со коефициенти**  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ .

**Пример 1.** Системот

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 9 \\ x^2 > 7x + 5 \end{cases}$$

е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 9 > 0 \\ x^2 - 7x - 5 > 0 \end{cases}$$

кој е во општ облик. Едно негово решение е  $x = 10$ , додека  $x = -1$  не е негово решение. Навистина,

$$\begin{cases} 10^2 - 4 \cdot 10 - 9 = 51 > 0 \\ 10^2 - 7 \cdot 10 - 5 = 25 > 0 \end{cases}, \text{ но } \begin{cases} (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 9 = -4 < 0 \\ (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 5 = 3 > 0 \end{cases}. \blacklozenge$$

Множеството решенија може да го претставуваме графички. **Графичко претставување** на решенијата на систем од две квадратни неравенки со една непозната се состои од следното:

**1)** Го прецртуваме делот од бројната оска на кој лежат точките кои соодветствуваат на решението на првата од неравенките.

**2)** На истата бројна оска го прецртуваме делот на кој лежат точките кои соодветствуваат на решенијата на втората неравенка.

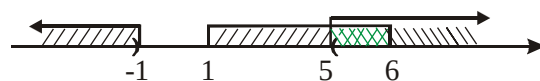
**3)** Двојно прецртаната област се состои од точките кои соодветствуваат на множеството решенија на системот.

Во продолжение, низ неколку примери ќе го илустрираме методот на решавање

систем квадратни неравенки со една непозната.

**Задача 1.** Реши го системот 
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

**Решение.** Најнапред ја решаваме неравенката  $x^2 - 4x - 5 > 0$ . Нејзиното множество решенија е  $R_1 = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ . Множеството решенија на втората неравенка е  $R_2 = [1, 6]$ . Тогаш  $R = R_1 \cap R_2 = (5, 6]$  е множеството решенија на дадениот систем.

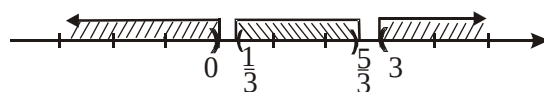


Цртеж 24

Графичкото претставување на решението е дадено на цртеж 24. ♦

**Задача 2.** Реши го системот 
$$\begin{cases} 9x^2 - 18x + 55 < 0 \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

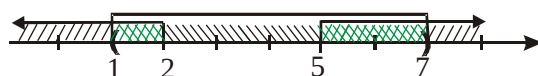
**Решение.** Множеството решенија на првата неравенка е  $R_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ , а множеството решенија на втората неравенка е  $R_2 = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ . Тогаш множеството решенија на дадениот систем е  $R = R_1 \cap R_2 = \emptyset$  (цртеж 25). ♦



Цртеж 25

**Задача 3.** Реши го системот 
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ (x-1)(x-7) < 0. \end{cases}$$

**Решение.** Множеството решенија на првата квадратна неравенка е  $R_1 = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$ , а множеството решенија на втората неравенка е  $R_2 = (1, 7)$ . Тогаш множеството решенија на дадениот систем е  $R = R_1 \cap R_2 = (1, 2] \cup [5, 7)$  (цртеж 26).



Цртеж 26

### Вкупност од две квадратни неравенки со една непозната

За множество од две квадратни неравенки со една иста непозната велиме дека е **вкупност квадратни неравенки со една непозната**, ако треба да се одредат сите вредности на променливата за кои е задоволена барем една од неравенките во системот.

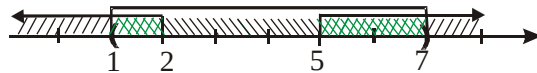
**Решение** на вкупност квадратни неравенки со една непозната е секој реален број  $x$  за кој барем една од неравенките во системот преминува во точно бројно неравенство.

**Множеството решенија** на вкупност квадратни неравенки со една непозната се состои од сите реални броеви кои се решенија на вкупноста, односно претставува унија на множествата решенија на секоја од неравенките во вкупноста.

**Задача 4.** Реши ја вкупноста квадратни неравенки:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ (x-1)(x-7) < 0 \end{cases}.$$

**Решение.** Множеството решенија на првата квадратна неравенка е  $R_1 = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$ , а множеството решенија на втората неравенка е  $R_2 = (1, 7)$ . Множеството решенија на дадената вкупност е  $R = R_1 \cup R_2 = \mathbb{R}$  (цртеж 27).



Цртеж 27

### Задачи

1. Дали системите  $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x < 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x^2 + 4x + 7 > 0 \\ x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases}$  се еквивалентни?

2. Реши ги системите:

а)  $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0; \\ -x^2 + 1 < 0 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0; \\ 6x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} x^2 + 2x + 5 < 0 \\ x^2 - 99x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$ .

3. Најди го множеството решенија на системите:

а)  $\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0; \\ x^2 + 10x + 16 < 0 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} x^2 + 5x + \frac{25}{4} > 0; \\ 6x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$ .

4. Реши ги системите:

а)  $\begin{cases} \frac{x^2 + 7}{2} < 4x; \\ (x-2)(x+3) < 0 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} \frac{x-3}{x+1} > 0; \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - 2x < \frac{x^2 + 4x}{2} - 1; \\ (x-6)(x-7) \leq 2(x+14) \end{cases}$ .

5. Најди го множеството решенија на вкупностите:

а)  $\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0; \\ x^2 + 10x + 16 < 0 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} x^2 + 5x + \frac{25}{4} > 0; \\ 6x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$ .

## 6.8. Примена на систем квадратни неравенки

Системите квадратни неравенки наоѓаат примена во решавање посложени задачи во математиката. Ќе разгледаме неколку примери.

**Задача 1.** Реши ја неравенката  $(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) \geq 0$ .

**Решение.** Од

$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \right),$$

следува дека множество решенија на дадената неравенка е унијата на множествата на решенија на двата системи квадратни неравенки. Множеството решенија на првиот

систем е  $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$ , а на вториот систем  $[-3, 2]$ . Решение на дадената неравенка е множеството  $(-\infty, -4] \cup [-3, 2] \cup [3, +\infty)$ . ♦

**Задача 2.** Реши ја неравенката  $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 16x + 55} \leq 0$ .

**Решение.** Бидејќи

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 16x + 55} \leq 0 \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ x^2 - 16x + 55 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 9x + 14 \leq 0 \\ x^2 - 16x + 55 > 0 \end{cases} \right),$$

множеството решенија на дадената неравенка е унијата на множествата на решенија на двата системи квадратни неравенки. Множеството решенија на првиот систем е  $[7, 11]$ , а на вториот систем  $[2, 5]$ . Решение на дадената неравенка е множеството  $[2, 5] \cup [7, 11]$ . ♦

**Задача 3.** Дали постои квадрат за којшто збирот од бројните вредности на плоштината и на периметарот е поголем од 5, а помал од 21?

**Решение.** Да ја означиме страната на бараниот квадрат со  $x$ . Од условите на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} x^2 + 4x > 5 \\ x^2 + 4x < 21 \end{cases},$$

којшто е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 4x - 21 < 0 \end{cases}.$$

Множеството решенија на првата неравенка е  $R_1 = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$ , додека множеството решенија на втората неравенка е  $R_2 = (-7, 3)$ . Решение на системот неравенки е  $R = (1, 3)$ . Според тоа, квадрат со бараните својства постои. Уште повеќе, секој квадрат чија должина е поголема од 1 и помала од 3 ги исполнува условите од задачата. ♦

## Задачи

1. Реши ги следниве неравенки:

- а)  $(x^2 - 4)(9x^2 - 12x + 4) \geq 0$ ;  
 б)  $(x^2 + 1)(49x^2 + 42x + 9) > 0$ ;  
 в)  $(36x^2 - 60x + 25)(81x^2 + 36x + 4) < 0$ ;  
 г)  $(-25x^2 + 30x - 9)(-9x^2 + 12x - 11) \leq 0$ .

2. Најди го множеството решенија на следниве неравенки:

- а)  $(x - 2)(x + 3)(x + 2)(x - 3) \geq 0$ ;      б)  $(x - 1)^2(x - 2)(x + 3) > 0$ ;  
 в)  $(x - 4)^2(x^2 - 4x + 3) < 0$ ;      г)  $(x - 1)(x - 2)(x + 7)(x - 3) \leq 0$ .

3. Реши ги следниве неравенки:

- а)  $\frac{3x^2 - 8x}{x^2 - 27} \leq 0$ ;      б)  $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x - 143} > 0$ ;      в)  $\frac{x^2 - x - 90}{x^2 - 4x - 5} < 0$ .

4. Најди го множеството решенија на следниве неравенки:

- а)  $\frac{(x - 4)^2}{12x^2 - 5x - 2} > 0$ ;      б)  $\frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 4)(x - 7)} \leq 0$ ;      в)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} < 0$ .

5. Најди два последователни природни броја за кои збирот од нивните квадрати е помал од 41, а нивниот производ е поголем од 6.

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Најди ги нулите на квадратните функции:

а)  $f(x) = x^2 + x$ ; б)  $f(x) = (x-3)^2 + 8$ ; в)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ .

2. За квадратната функција  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{89}{18}$  најди ги координатите на темето.

3. Одреди го знакот на следниве квадратни функции:

а)  $f(x) = 6x^2 - 37x + 1$ ; б)  $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ ; в)  $f(x) = -(x-5)^2 - 4$ .

4. Дадена е квадратната функција

$$f(x) = (m-2)x^2 + (m^2 - m - 2)x - m, m \neq 2.$$

Најди ја вредноста на параметарот  $m$ , ако точката  $A(1,2)$  припаѓа на графикот на дадената квадратна функција, а потоа, за добиената вредност на  $m$ , најди ги координатите на темето.

5. Испитај ги својствата и нацртај го графикот на следниве квадратни функции:

а)  $f(x) = (x-1)^2 - 4$ ; б)  $f(x) = (x-1)(x+3)$ ; в)  $f(x) = -9x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ .

6. Реша ги следниве неравенки:

а)  $x^2 - 8x + 7 > 0$ ; б)  $12 + x - x^2 \leq 0$ ; в)  $(x + \frac{3}{2})(x - 2) \geq 0$ ;  
г)  $\frac{5x+4}{6} - x < \frac{x(x+1)}{2} + 1$ ; д)  $\frac{x+3}{x} \geq -2$ ; е)  $2 - \frac{x-1}{x+1} < -\frac{1}{2}$ .

7. Најди го множеството решенија на системите:

а)  $\begin{cases} 5x^2 + 6x + 1 \geq 0 \\ 16x^2 + 10x + 1 < 0 \end{cases}$ ; б)  $\begin{cases} 7x^2 + 4x + 1 > 0 \\ (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{16x+1}{4} < 84 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} \frac{x+1}{x-3} > 0 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$ .

8. Реша ги неравенките:

а)  $(x^2 + 4)(14x^2 - 53x + 14) > 0$ ; б)  $(x+4)(x-1)(12x^2 - 25x + 12) > 0$ ;  
в)  $(3x^2 - 9x + 7)(14x^2 - 7x + 1) \leq 0$ .

9. Најди го множеството решенија на следниве неравенки:

а)  $\frac{(x-2)^2}{24x^2 - 5x - 1} > 0$ ; б)  $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x-7)} \leq 0$ ; в)  $\frac{x-4}{(x-7)(2x^2 - 5x - 12)} < 0$ .

10. Збирот на квадратите на два последователни непарни природни броеви е поголем од 74, а помал од 202. Кои се тие броја?



## 7. ВЕКТОРИ ВО РАМНИНА. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО ПРОСТОР

### 7.1. Поим за вектор

Минатата учебна година се запозна со поимите: точка, права, рамнина, растојание, отсечка, и други, нивните меѓусебни односи како и начините на означување.

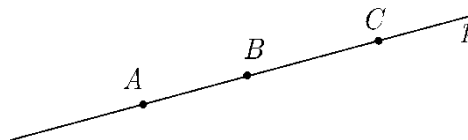
При решавање задачи забележуваме дека некои поими, како што се должина на отсечка, плоштина на триаголник, маса на некое тело, температура на вода и друго, се определени само со реален број (скалар) кој го претставува односот на тој поим со единичната мерка за неговата големина. Ваквите поими (големини, величини) се нарекуваат **скаларни**. Така, на пример, ако масата на едно тело е  $2\text{kg}$ , тогаш таа е двапати поголема од единичната мера за маса  $1\text{kg}$ .

Постојат поими (сила, забрзување, јачина на магнетно поле...), кои, освен со својата бројна вредност, се определени и со својот правец и со својата насока. На пример, ако речеме дека ветрот дувал со брзина од  $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , со тоа само сме ја кажале бројната вредност на брзината на ветрот. Не знаеме во кој правец дувал тој или во која насока. Значи, за да се определи брзината на ветрот не е доволна само нејзината бројна вредност. Ако речеме уште дека ветрот дувал во правец север-југ, сме го кажале и правецот на брзината на ветрот. Останува уште да кажеме дали дувал од југ кон север или од север кон југ. Тоа ја определува насоката. Ваквите поими (големини, величини) кои се определени со својата бројна вредност, својот правец и својата насока се нарекуваат **векторски**.

Нека  $p$  е права во рамнината. Правата  $p$  заедно со сите прави паралелни со неа определува **правец во рамнината**. Понатаму правецот ќе го поистоветуваме со една од правите, кои се меѓусебно паралелни, т.е. таа права ќе биде претставник на правецот.

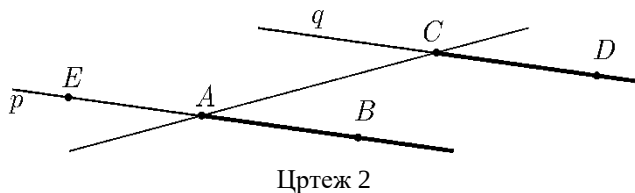
Да разгледаме две полуправи кои лежат на иста права (т.е. се подмножества од иста права). Ако едната полуправа е подмножество од другата, велиме дека полуправите имаат **иста насока**. Во спротивно ќе велиме дека имаат **спротивна насока**.

На цртежот 1 полуправите  $AC$  и  $BC$  имаат иста насока бидејќи  $BC$  е подмножество од  $AC$ . Полуправите  $BA$  и  $AC$  имаат спротивна насока бидејќи ниту  $BA \subseteq AC$ , ниту  $AC \subseteq BA$ .



Цртеж 1

Сега да разгледаме две полуправи  $AB$  и  $CD$ , кои лежат на две паралелени прави  $p$  и  $q$ , соодветно. Нека нивните почетни точки се  $A$  и  $C$ . Правата  $AC$  ја дели рамнината на две полурамнини и секоја од полуправите е подмножество од една полурамнина. Ако двете полуправи се подмножества од иста полурамнина, тогаш велиме дека двете полуправи имаат **иста насока**. Во спротивно ќе велиме дека имаат спротивна насока. Така, на цртеж 2, полуправите  $AB$  и  $CD$  имаат иста насока, а  $AE$  и  $CD$  имаат спротивна. Јасно,  $EA$  и  $CD$  имаат иста насока.



Цртеж 2

Значи насока се дефинира само ако полуправите имаат ист правец.

**Дефиниција. Вектор** ќе ни претставува математички објект, кој е определен со своите: големина, правец и насока.

Геометриски ќе го претставуваме со таканаречената **насочена отсечка**. Тоа е отсечка на која едната точка се смета за почетна точка (почеток на векторот), а другата за крајна (крај на векторот). Векторот (т.е. насочената отсечка) ќе го означуваме со  $\overrightarrow{AB}$  (значи  $A$  се смета за почетна точка, а  $B$  за крајна) (цртеж 3).



Цртеж 3

**Пример 1.** Дадени се четири различни точки  $A, B, C$  и  $D$ . Со почеток во точката  $A$ , може да се образуваат векторите  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ . Со почеток во  $B$ , векторите  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{BD}$  итн. Конечно, на овој начин, може да се образуваат вкупно 12 вектори.

Секој вектор  $\overrightarrow{AB}$  е определен со:

- **големина** еднаква на должината на отсечката  $AB$  (т.е.  $|\overrightarrow{AB}|$ ),
- **правец** определен со правата  $AB$  и
- **насока** од точката  $A$  кон точката  $B$  (т.е. насоката на полуправата  $AB$ ). ♦

Освен со  $\overrightarrow{AB}$ , векторите ќе ги означуваме и со  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ , а нивните големина со  $|\overrightarrow{AB}|$  или со  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \dots$ . Големината на векторот уште ќе ја нарекуваме и **должина на векторот** (интензитет или модул на векторот).

За векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  велиме дека имаат:

- **иста големина**, ако  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  и пишуваме  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ,
- **ист правец**, ако  $AB$  и  $CD$  се паралелни прави (или  $AB$  и  $CD$  се прави, кои се совпаѓаат) и пишуваме  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ,
- **иста насока**, ако полуправите  $AB$  и  $CD$  имаат иста насока и пишуваме  $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$
- **спротивна насока**, ако полуправите  $AB$  и  $CD$  имаат спротивна насока и пишуваме  $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD}$ .

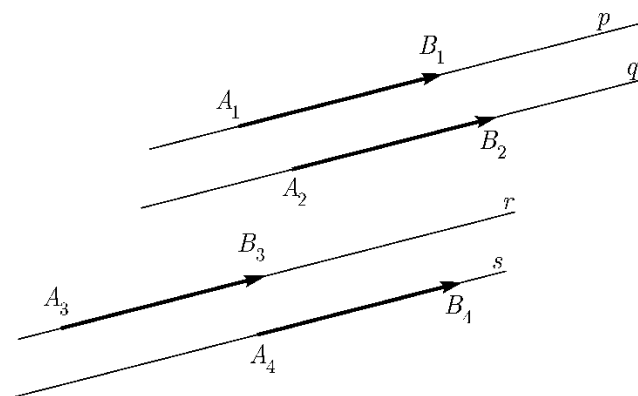
**Дефиниција.** Векторите, кои имаат ист правец, ќе ги нарекуваме **колинеарни**.

Векторот, кој има должина 0, ќе го нарекуваме **нулти вектор** и ќе го означуваме со  $\vec{0}$  или со  $\overrightarrow{AA}$  т.е. ќе користиме иста почетна и крајна точка. Тој вектор има ист правец и иста насока со секој вектор.

Векторот, кој има должина 1, ќе го нарекуваме **единичен вектор** или **орт**.

**Дефиниција.** За два вектори  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  ќе велиме дека се **еднакви** ( $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ) ако имаат иста големина, ист правец и иста насока.

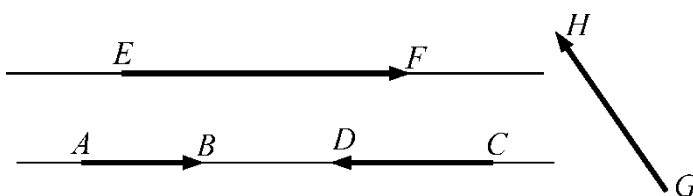
Така, векторите  $\vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{A_2B_2}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{A_3B_3}$  и  $\vec{d} = \overrightarrow{A_4B_4}$  на цртеж 4 се еднакви. Притоа правите и  $s$  се паралелни и должините на отсечките и  $A_4B_4$  се еднакви.



Цртеж 4

**Дефиниција:** За два вектори  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  ќе велиме дека се **спротивни** ( $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ) ако имаат иста големина, ист правец и спротивна насока.

**Пример 2.** На цртеж 5 претставени се две паралелни прави. Векторите  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{EF}$  се колинеарни меѓу себе, но векторот  $\overrightarrow{GH}$  не е колинеарен со ниту еден од нив. Векторите  $\overrightarrow{EF}$  и  $\overrightarrow{CD}$  се спротивно насочени, но не се спротивни еден на друг. ♦

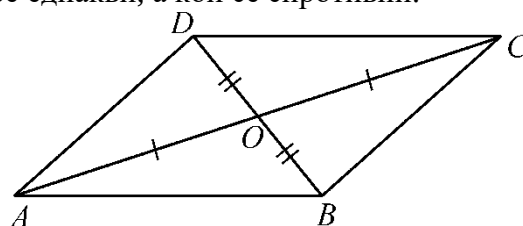


Цртеж 5

**Задача 1.** Нека  $ABCD$  е паралелограм и  $O$  е пресекот на неговите дијагонали (цртеж 6). Одреди кои од следниве парови вектори се еднакви, а кои се спротивни.

- а)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$    б)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$    в)  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$   
г)  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$    д)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$

**Решение.** а) Векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  се спротивни,  
б) Векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  се еднакви,  
в) Векторите  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{CB}$  се спротивни,



Цртеж 6

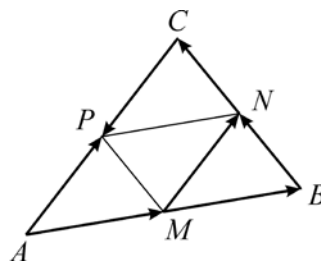
г) Векторите  $\overrightarrow{AO}$  и  $\overrightarrow{AC}$  се колинеарни, не се еднакви, ниту спротивни,

д) Векторите  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OC}$  се спротивни. ♦

### Задачи

1. Нека  $ABC$  е триаголник и  $M, N, P$  се средините на страните  $AB, BC, CA$ , соодветно (цртеж 7). Кои од следните равенства се точни:

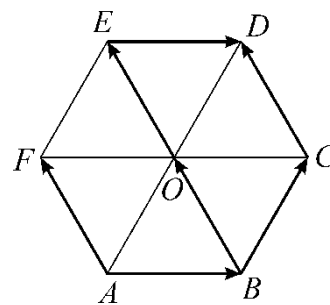
- а)  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$ , б)  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$ ,  
 в)  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$ , г)  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$ , д)  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$  ?



Цртеж 7

2. Нека  $ABCDEF$  е правилен шестаголник и  $O$  е центар на опишаната кружница (цртеж 8). Кои од следните равенства се точни:

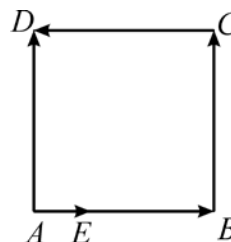
- а)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ , б)  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$ ,  
 в)  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE}$ , г)  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE}$  ?



Цртеж 8

3. На страните на квадратот  $ABCD$  зададени се неколку вектори (цртеж 9). Наведи кои од нив се:

- а) колинеарни, б) истонасочени,  
 в) еднакви, г) спротивни.

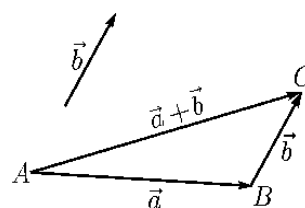


Цртеж 9

## 7.2. Операции со вектори

### Собирање на вектори

Нека  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се произволни вектори во рамнината. Ако означиме  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , тогаш може да конструираме права која минува низ точката  $B$  и е паралелна со правата која е определена со векторот  $\vec{b}$ . На овој начин го добиваме векторот  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  кој е надоврзан на векторот  $\vec{a}$  т.е. почетокот на  $\vec{b}$  се совпаѓа со крајот на  $\vec{a}$  (цртеж 10). Значи  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ .



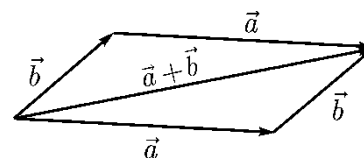
Цртеж 10

**Дефиниција. Збир на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  се нарекува векторот  $\overrightarrow{AC}$ , т.е. векторот чиј почеток е почетокот на  $\vec{a}$ , а крај е крајот на  $\vec{b}$ . Збирот на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ќе го означуваме со  $\vec{a} + \vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Овој начин на собирање вектори се нарекува **правило на триаголник**.

Ако наместо да ги надоврземе еден на друг, неколинеарните вектори ги донесеме во ист почеток (цртеж 11), тогаш збирот на векторите има правец и големина на

дијагоналата на паралелограмот и насока од темето кое е заеднички почеток. Овој начин на собирање се нарекува **правило на паралелограм**.

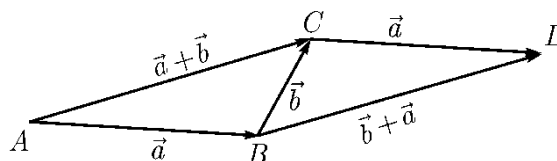


Цртеж 11

Ќе докажеме неколку својства на збирот на вектори.

- За секои вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  важи  $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$ , т.е. важи **комутативниот закон за собирање на вектори**.

Навистина, Нека се дадени векторите  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  (цртеж 12). Збирот  $\vec{b} + \vec{a}$  го добиваме кога крајот на  $\vec{b}$  и почетокот на  $\vec{a}$  се совпаѓаат, т.е.  $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BD}$ . Тогаш  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  и  $AB$  и  $CD$  се паралелни, па  $ABCD$  е



Цртеж 12

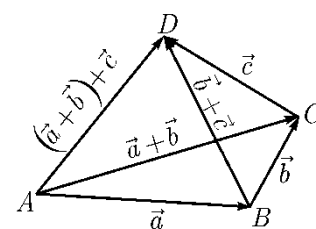
паралелограм. Значи векторите  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$  имаат иста големина и ист правец. Уште полуправите  $AC$  и  $BD$  лежат во иста полурамнина определена со правата  $AB$ , па векторите  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$  имаат иста насока. Следува  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{a}$ . ♦

Нека, сега, трите вектори се надоврзани еден на друг, т.е. нека  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  и  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  (цртеж 13). Тогаш  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$  и  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ , па следува дека важи следново својство

- За секои вектори  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  важи

$$\boxed{\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}$$

т.е. важи **асоцијативниот закон за собирање на вектори**.



Општо, за собирање на  $n$  вектори, каде  $n$  е природен број, се користи **правилото на многуаголник**. Векторите се „надоврзуваат“ еден на друг (почетокот на следниот е во крајот на претходниот) и нивниот збир е векторот чиј почеток е во почетокот на првиот, а крајот е во крајот на последниот вектор (цртеж 14).

- За секој вектор  $\vec{a}$  важи  $\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}}$ .

Навистина, ако

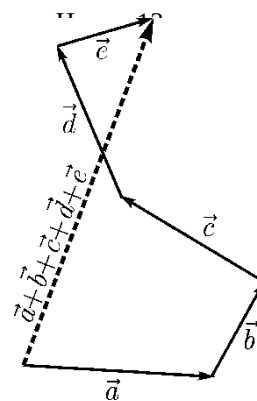
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{0} = \overrightarrow{BB}$$

тогаш

$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}. \blacklozenge$$

Ако  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , тогаш  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ , па  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ . Според тоа важи следново својство:

- За секој вектор  $\vec{a}$  важи  $\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}}$ .



Цртеж 14

**Пример 1.** Нека  $A, B$  и  $C$  се три точки во рамнината. Векторот  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$  е нулти вектор, бидејќи од правилото на триаголник имаме:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ . ♦

### Одземање на вектори

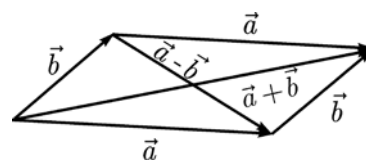
**Дефиниција.** Ако  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се произволни вектори, тогаш **разликата**  $\vec{a} - \vec{b}$  се дефинира со  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Ова значи дека одземањето вектори е собирање на еден вектор и спротивниот на другиот вектор. Според тоа, разликата

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB},$$

за произволни точки  $A, B$  и  $C$  од рамнината.

Ако имаме паралелограм конструиран над два вектори,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , тогаш векторот  $\vec{a} + \vec{b}$  лежи на дијагоналата која минува низ нивниот заеднички почеток, а векторот  $\vec{a} - \vec{b}$  на другата дијагонала (цртеж 15).



Цртеж 15

### Множење на вектор со број (скалар)

Нека  $\vec{a}$  е вектор и  $k$  е скалар (реален број). Векторот  $k\vec{a}$  е вектор определен со: правец ист со правецот на  $\vec{a}$ , должина  $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$  и ако  $k > 0$ , векторите  $k\vec{a}$  и  $\vec{a}$  имаат исти насоки, а ако  $k < 0$ , векторите  $k\vec{a}$  и  $\vec{a}$  имаат спротивни насоки.

**Дефиниција.** Векторот  $k\vec{a}$  се нарекува **производ на векторот  $\vec{a}$  со скаларот  $k$** .

За множењето на вектор со скалар важат следниве својства:

- За секој вектор  $\vec{a}$  и скалар  $k$  важи

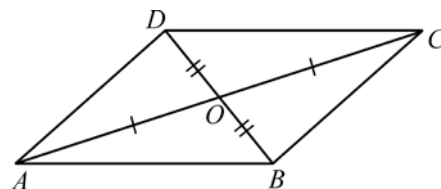
$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, k \cdot \vec{0} = \vec{0}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

- За секои скалари  $k$  и  $m$  и вектор  $\vec{a}$  важи  $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$  и  $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ .
- За секој скалар  $k$  и секои вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  важи  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ .

Ненултите вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се колинеарни ако и само ако постои скалар  $k \neq 0$ , така што  $\vec{a} = k\vec{b}$ . Ако  $k \neq 0$  со  $\frac{\vec{a}}{k}$  ќе го означуваме векторот  $\frac{1}{k}\vec{a}$ . Значи,  $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$ .

**Задача 1.** Нека  $ABCD$  е паралелограм и  $O$  пресекот на неговите дијагонали. Упрости ги изразите:

- а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO}$ ,  
 б)  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$ , в)  $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC}$ ,  
 г)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO}) + \overrightarrow{OA}$ , д)  $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ , е)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BO}$



Цртеж 16

**Решение.** а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$  ако

искористиме дека  $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$  или

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO}$  ако искористиме дека  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,

б)  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ , бидејќи  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CO}$  и  $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{DO}$ ,

в)  $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{BC}$ , бидејќи  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CO}$

г)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB}$

д)  $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$ , е)

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  или  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ . ♦

**Пример 2.** На цртежот 17, дадени се векторите  $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$  такви што  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$  и  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ . Ќе ги изразиме векторите  $\overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{BN}$  со помош на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

За векторот  $\overrightarrow{BM}$  имаме:  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$ , слично

$\overrightarrow{NC} = \vec{b}$ , а за векторот  $\overrightarrow{MN}$  од правилото на триаголник

имаме:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$ , но

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$  ако се искористи разлика на

вектори и

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{a} + \vec{b}$ . ♦

**Задача 2.** Упрости ги изразите:

а)  $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ , б)  $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a})$

**Решение.** Со примена на својствата за множење на вектор со скалар се добива:

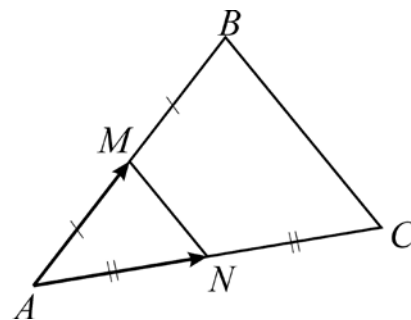
а)  $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$ ,

б)  $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{b} + 5\vec{c} - 5\vec{a} = -3\vec{a} + 11\vec{c}$ . ♦

**Задача 3.** Во каква заемна положба се наоѓаат точките A, B и C ако важи  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ ?

**Решение.** Јасно е дека точките A, B и C лежат на една иста права т.е. се колинеарни.

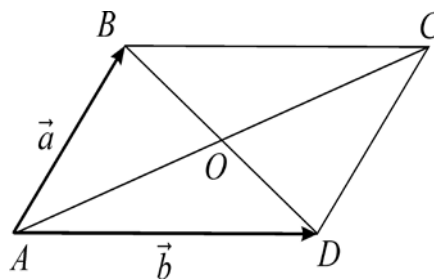
Треба да го одредиме редоследот на тие точки на правата. Од равенството  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$  следува дека должината на отсечката  $\overline{AB}$  е двапати поголема од должината на отсечката  $\overline{AC}$  и векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  се исто насочени. Заради тоа заклучуваме дека точката C лежи на средина меѓу точките A и B. ♦



Цртеж 17

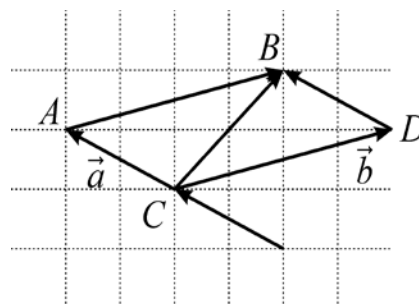
### Задачи.

1. Изрази ги векторите  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$  со помош на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , ако  $ABCD$  е паралелограмот на цртеж 18.



Цртеж 18

2. Нека  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ . Според цртеж 19, изрази ги со помош на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторите:  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BE}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{ED}$ .



Цртеж 19

3. Даден е правилен шестаголник  $ABCDEF$  и  $O$  е центар на опишаната кружница.

Нека  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$  и  $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$ . Изрази ги со помош на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторите:  $\overrightarrow{OD}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{FB}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{FE}$ ,  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{CE}$  и  $\overrightarrow{CF}$ .

4. Дијагоналите на паралелограмот  $ABCD$  се сечат во точката  $S$ . Провери дали важат равенствата:

а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$ , б)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$ ,

в)  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$ .

5. Упрости го изразот  $2(\vec{a} - \vec{b}) - 5(\vec{a} + \vec{b}) + 2\vec{a} + 6\vec{b}$ .

## 7.3. Примена на вектори

Векторите имаат широка примена во техниката, физиката, математиката и други науки. Овде ќе наведеме неколку задачи со кои се илустрира примената на векторите во докажување на некои тврдења од геометријата.

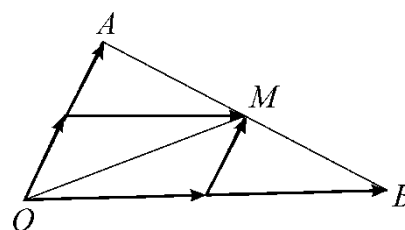
**Задача 1.** Нека  $M$  е средишна точка на отсечката  $AB$ , а  $O$  е произволна точка во рамнината. Докажи дека  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ .

**Решение.** Имаме

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ , (цртеж 20). Ако ги собереме овие равенства, добиваме:

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}, \quad 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}), \quad 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0},$$

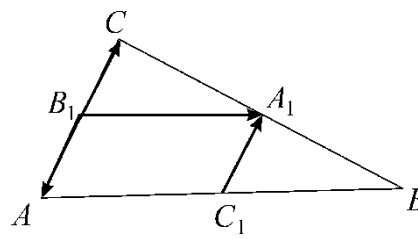
$\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{BM}$  се спротивни вектори, па  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ . ♦



Цртеж 20



**Задача 2.** Точките  $A_1$  и  $B_1$  се средини на страните  $AC$  и  $BC$  на триаголникот  $ABC$  (цртеж 21). Докажи дека  $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ .



Цртеж 21

**Решение.** Важи  $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$ . Од друга страна имаме:  $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$ .

Со собирање на овие равенства, добиваме:  $2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$ .

$$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}) + (\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1});$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0};$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \quad \blacklozenge$$

**Забелешка.** Отсечката  $A_1B_1$  се нарекува средна линија паралелна со страната  $AB$  во  $\triangle ABC$  и од тоа што  $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  следува дека  $|\overrightarrow{B_1A_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ , а тоа значи дека векторите се колинеарни, т.е.  $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  и  $B_1A_1 \parallel AB$  т.е. средната линија во триаголник има должина половина од должината на страната паралелна со неа.

**Задача 3.** Нека  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се неколинеарни вектори и  $x$  и  $y$  се произволни реални броеви. Ако  $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ , тогаш  $x = y = 0$ . Докажи!

**Решение.** Од тоа што  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се неколинеарни вектори следува дека тие не се нулти вектори. Да претпоставиме спротивно т.е.  $x \neq 0$ . Тогаш од  $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$  следува дека  $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$  што значи дека векторите се колинеарни. Ова е контрадикција со претпоставката. Аналогно се добива ако ја земеме другата претпоставка т.е.  $y \neq 0$ . Според ова, мора да важи  $x = y = 0$ .  $\blacklozenge$

**Задача 4.** Дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат. Докажи!

**Решение.** Нека  $ABCD$  е паралелограм и  $O$  е пресечната точка на дијагоналите  $AC$  и  $BD$ . Бидејќи точките  $A, O$  и  $C$  се колинеарни, следува дека постои реален број  $x$  таков што  $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ . Аналогно, постои реален број  $y$  таков што

$$\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).$$

Од друга страна  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ , па мора

$$y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} \text{ т.е. } (x-1+y)\overrightarrow{AB} + (x-y)\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

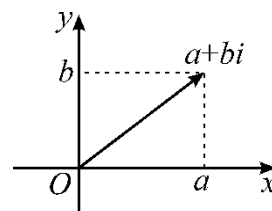
Векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$  не се колинеарни, па од задача 3 имаме  $x-1+y=0$  и  $x-y=0$  т.е.  $x=y=\frac{1}{2}$ . ♦

### Претставување на комплексните броеви со вектори

Нека е дадена точка  $M$  во координатниот систем  $xOy$ . Векторот  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  се нарекува **радиусвектор** на точката  $M$ . Притоа, координатите на точката  $M$  се сметаат и за координати на векторот  $\vec{r}$ .

Бидејќи секој комплексен број може да се претстави како точка во рамнината, тогаш тој број има и соодветен радиусвектор.

Според тоа, комплексните броеви можат геометриски да се претстават и како вектори во  $xOy$  рамнината. Нека  $z = a + bi$  е произволен комплексен број. Векторот  $\vec{z}$  со координати  $(a, b)$  ќе го придружаме на дадениот комплексен број  $z$ . Ако  $M$  го претставува комплексниот број  $z$ , тогаш  $\vec{z} = \overrightarrow{OM}$ . Според тоа  $\vec{z}$  е радиусвекторот на точката  $M$  (цртеж 22).



Цртеж 22

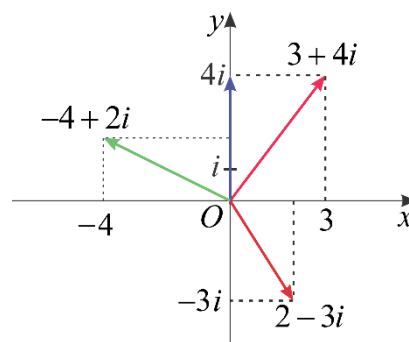
**Задача 5.** Претстави ги во комплексната рамнина со вектор броевите:

- а)  $z = 3 + 4i$ ;      б)  $z = -4 + 2i$ ;  
 в)  $z = 2 - 3i$       г)  $z = 3$ ;      д)  $z = 4i$ .

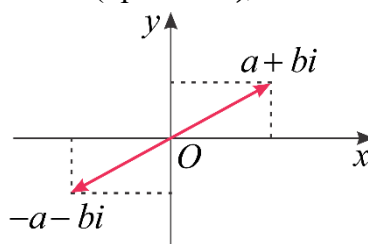
**Решение.** Претставувањето е прикажано на цртеж 23.

♦

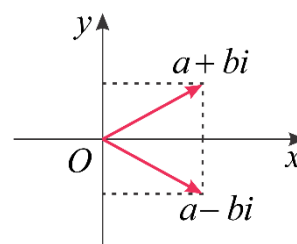
Нека даден комплексен број  $z = a + bi$  е претставен со векторот  $\vec{z}$ . Тогаш векторот со кој е претставен нему спротивниот комплексен број  $-z = -a - ib$  е спротивен на векторот  $\vec{z}$  (цртеж 24), додека векторот со кој е претставен нему коњугираниот комплексниот број  $\bar{z} = a - bi$  е вектор осносиметричен на векторот  $\vec{z}$  во однос на  $x$ -оската (цртеж 25).



Цртеж 23



Цртеж 24

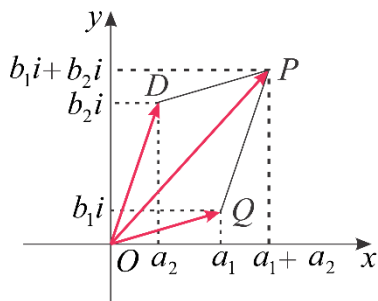


Цртеж 25

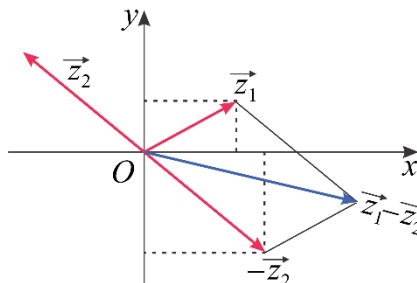
Изнесениот метод на претставување комплексен број со вектор ќе го надградиме со методот на претставување на збир и разлика на два комплексни броја со вектор. Нека комплексните броеви  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  се претставени со векторите  $\vec{z}_1 = \overrightarrow{OQ}$  и  $\vec{z}_2 = \overrightarrow{OD}$ , соодветно. Тогаш според правилото на паралелограм векторот  $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \overrightarrow{OP}$  е определен со дијагоналата на паралелограмот над страните  $OQ$  и  $OD$  (цртеж 26). Точката  $P$  има координати  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  бидејќи триаголниците  $OCD$  и  $QRP$  се складни. Според тоа,  $\vec{z}$  го претставува комплексниот број

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

За наоѓање на векторот што ја претставува разликата  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$  најнапред го определуваме векторот  $-z_2$ , а потоа проблемот се сведува на определување на вектор што претставува збир на два вектора (цртеж 27).



Цртеж 26



Цртеж 27

## Задачи

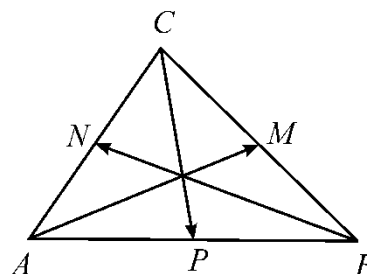
1. Нека  $M, N$  и  $P$  се средини на страните на триаголникот  $ABC$  (цртеж 28).

$$\text{Докажи } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}.$$

2\*. Нека  $T$  е тежиште во  $\triangle ABC$ . Докажи дека

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \text{ каде } O \text{ е произволна точка во}$$

рамнината.



Цртеж 228

3. Даден е квадрат  $ABCD$  и  $S$  е точка во која се сечат неговите дијагонали. Нека  $M$  и  $N$  се средини на страните  $BS$  и  $DS$ , соодветно. Изрази ги векторите  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , со помош на векторите  $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$  и  $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$ .

4. Даден е правилен шестаголник  $ABCDEF$  и  $S$  е центар на опишаната кружница. Упрости ги векторите:

$$\text{а) } \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}, \quad \text{б) } \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB}, \quad \text{в) } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES}, \quad \text{г) } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS}.$$

5. Нека  $D, E$  и  $F$  се средини на страните  $BC, AC$  и  $AB$ , соодветно, на  $\triangle ABC$ . Ако  $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$  и  $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$ , тогаш изрази ги векторите  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$  и  $\overrightarrow{CF}$  со помош на векторите  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .

6. Претстави го со вектор, во комплексната рамнина, комплексниот број  $z$ , ако:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } z = 1 + i; & \text{б) } z = -2 + 5i; & \text{в) } z = 5 - 2i & \text{г) } z = 2; \\ \text{д) } z = i. & \text{ѓ) } z = -1 - 2i; & \text{е) } z = -3; & \text{ж) } z = -2i. \end{array}$$

7. Претстави го со вектор комплексниот број  $z$  и нему конјугираниот комплексен број  $\bar{z}$  ако:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } z = 1 + 5i; & \text{б) } z = 1 - 4i; & \text{в) } z = -4 - 5i; & \text{г) } z = 2 - i; \\ \text{д) } z = 1; & \text{ѓ) } z = -1; & \text{е) } z = 2i; & \text{ж) } z = -i. \end{array}$$

8. Претстави го со вектор комплексниот број  $z$  и нему спротивниот комплексен број  $-z$  ако:

- а)  $z = 2 + 3i$ ;      б)  $z = 2 - i$ ;      в)  $z = -4 - 7i$ ;      г)  $z = 2 - i$ ;  
 д)  $z = 1$ ;      е)  $z = -1$ ;      ж)  $z = 2i$ ;      з)  $z = -i$ .

9. Претстави ги со вектор, во комплексната рамнина, броевите  $z_1 = 6 + 2i$  и  $z_2 = 2 + 7i$ , а потоа конструирај го збирот на така добиените вектори и определи ги неговите координати. Најди го комплексниот број претставен со резултантниот вектор.

10. Претстави ги со вектор во комплексната рамнина броевите  $z_1 = 4 + i$  и  $z_2 = 1 + 5i$ , а потоа конструирај ја разликата на првиот со вториот од двата добиени вектори и најди ги неговите координати. Најди го комплексниот број претставен со резултантниот вектор.

## 7.4. Аксиоми за просторна геометрија

Минатата учебна година се запозна со основните и изведените поими, некои од аксиомите и теоремите во рамнинската геометрија (планиметрија). Ги изучи заемните односи на основните поими точка и права во една рамнина. Овој дел е посветен токму на аксиомите и некои теореми од просторната геометрија (стереометрија), како и заемните односи на основните поими точка, права и рамнина.

Да се потсетиме, сите поими чија точност ја прифаќаме без дефиниција се викаат **основни поими**, а сите други поими се викаат **изведени поими**.

При изградбата на **просторната геометрија** се тргнува од основните поими: **точка, права, рамнина, растојание и простор**, а потоа користејќи ги нив како и други математички поими се дефинираат останатите геометриски поими. Притоа секое множество точки во просторот се вика **просторна геометриска фигура**. Основните поими: точка, права, рамнина и простор се викаат и основни геометриски фигури. Простор е бесконечно множество точки со ознака  $\mathcal{P}$  чии елементи ги означуваме со  $A, B, C, \dots$  големите латински букви.

При изградбата на просторната геометрија ќе прифатиме дека секоја точка од просторот се наоѓа на некое растојание од друга точка. За растојанието меѓу две точки  $A$  и  $B$  ќе ја користиме ознаката  $\overline{AB}$  и ги прифаќаме следните аксиоми:

**A1.** Растојанието од една точка  $A$  до друга точка  $B$  е позитивен реален број или нула, односно  $\overline{AB} \geq 0$ . Тоа е позитивен број, ако точките се различни, и е нула ако тие се совпаѓаат; односно

$$\text{ако } A \neq B, \text{ тогаш } \overline{AB} > 0, \text{ и ако } A = B, \text{ тогаш } \overline{AB} = 0.$$

**A2.** За секои две точки  $A$  и  $B$ , растојанието од  $A$  до  $B$  е еднакво на растојанието од  $B$  до  $A$ , односно  $\overline{AB} = \overline{BA}$ .

**A3.** За кои било три точки  $A, B$  и  $C$ , растојанието од  $A$  до  $C$  не е поголемо од збирот на растојанијата  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$ , односно

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

**Теорема 1.** За кои било три точки  $A, B$  и  $C$ , во просторот  $\mathcal{P}$ , растојанието  $\overline{AC}$  е поголемо или еднакво на разликата од растојанијата  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$ , односно при услов  $\overline{AB} > \overline{BC}$  важи неравенството  $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$ .

Навистина, согласно со аксиомата **A3** имаме  $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$ . Ако двете страни на неравенство ги намалиме за  $\overline{BC}$ , добиваме  $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{BC}$ , односно  $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC}$ , што значи  $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$ . ♦

**Пример 1.** Нека  $A, B, C$  и  $D$ , се произволни четири точки во просторот  $\mathcal{P}$ . Со помош на последователна примена на **A3**, може да заклучиме дека важи

$$\overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{BD} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}, \text{ т.е. } \overline{AD} \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}. \quad \blacklozenge$$

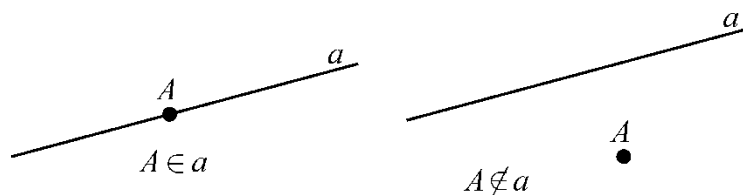
**Задача 1.** Познато е дека  $\overline{AB} = 15$  и  $\overline{BC} = 8$ . Дали може  $\overline{AC}$  да биде:

а) 6, б) 16, в) 23, г) 2 и д) 0.

**Решение.** Познато е дека, од **A3**, важи  $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC} = 15 + 8 = 23$ , а од теорема 1, важи  $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC} = 15 - 8 = 7$ . Значи  $7 \leq \overline{AC} \leq 23$ , па точни се одговорите б) и в). ♦

Правите и рамнините се основни геометриски поими. Притоа правите ги означуваме со  $a, b, c, \dots$  малите латински букви, а рамнините со  $\Sigma, \Pi, \dots$  со големите букви од грчката азбука.

Правата  $a$  е множество точки во просторот  $\mathcal{P}$  и ако  $A$  е точка од просторот, тогаш или  $A \in a$  или  $A \notin a$ . Притоа, ако  $A \in a$ , велиме дека „точката  $A$  лежи на правата  $a$ “ или „правата  $a$  минува низ точката  $A$ “. Ако, пак,  $A \notin a$ , велиме дека „точката  $A$  не лежи на правата  $a$ “ или „правата  $a$  не минува низ точката  $A$ “. Нагледно прикажуваме како на цртеж 29.



Цртеж 239

**A4.** На секоја права лежат бесконечно многу точки. За секоја права постојат точки што не и припаѓаат. Низ секоја точка минуваат бесконечно многу прави.

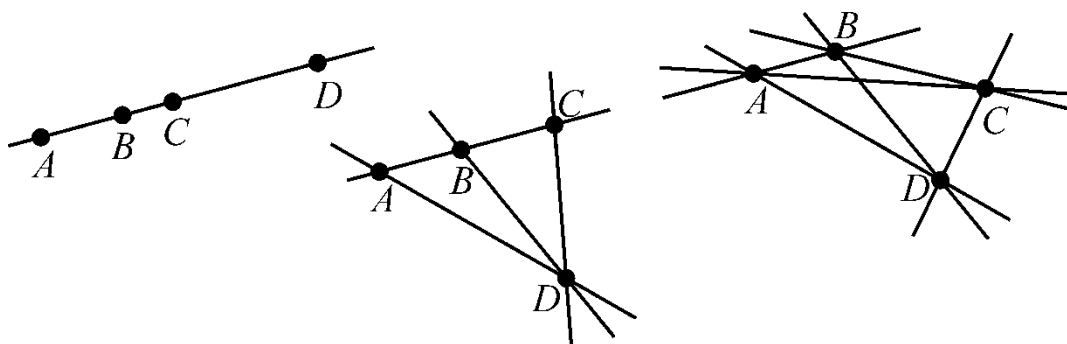
**A5.** Низ кои било две различни точки минува една и само една права.

Заради оваа аксиома, во иднина наместо ознаката  $a$  за некоја права, може да речеме правата  $AB$ , се разбира ако таа права е определна со тие две точки т.е. ако  $A, B \in a$ .

За сите точки од просторот  $\mathcal{P}$  кои лежат на една иста права ќе велиме дека се **колинеарни точки**.

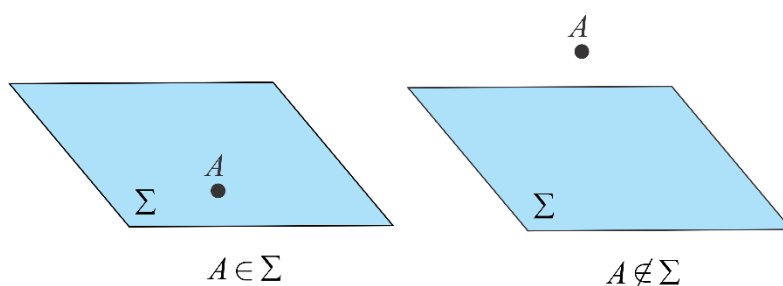
**Задача 2.** Четири различни точки можат да определат една, четири или шест прави. Докажи!

**Решение.** Да ги означиме точките со  $A, B, C$  и  $D$ . Ако сите четири точки се колинеарни, тогаш тие определуваат една права. Ако три од нив се колинеарни, на пример, точките  $A, B$  и  $C$ , тогаш секоја од нив со  $D$  образува права, па се добиваат правите  $AD, BD$  и  $CD$  кои заедно со правата  $AB$  се вкупно 4. Ако кои било три од дадените точки не се колинеарни, тогаш може да ги образуваме следните прави:  $AB, AC, AD, BC, BD$  и  $CD$  т.е. вкупно 6 (цртеж 30). ♦



Цртеж 3024

Рамнината  $\Sigma$  е множество точки во просторот  $\mathcal{P}$  и ако  $A$  е точка од просторот, тогаш или  $A \in \Sigma$  или  $A \notin \Sigma$ . Притоа, ако  $A \in \Sigma$ , велиме дека „точката  $A$  лежи во рамнината  $\Sigma$ “ или „рамнината  $\Sigma$  минува низ точката  $A$ “. Ако, пак,  $A \notin \Sigma$ , велиме дека „точката  $A$  не во рамнината  $\Sigma$ “ или „рамнината  $\Sigma$  не минува низ точката  $A$ “. Нагледно прикажуваме како на цртеж 31.



Цртеж 31

**A6.** На секоја рамнина во просторот лежат бесконечно многу точки, а за секоја рамнина постојат точки што не и припаѓаат.

**A7.** Ако точките  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни, тогаш постои една и само една рамнина што минува низ тие точки.

Заради оваа аксиома, во иднина наместо ознаката  $\Sigma$  за некоја рамнина, може да речеме рамнината  $ABC$ , се разбира ако таа рамнина е определна со тие три точки т.е. ако  $A, B, C \in \Sigma$ .

Ако ги разгледаме правите и рамнините како множества точки кои се подмножества од просторот  $\mathcal{P}$ , тогаш природно е да бидат различни множества точки т.е. различни фигури. Во **A5** бараме две различни точки да определуваат единствена права, но тоа не значи дека три точки секогаш ќе лежат на иста права. Кога тие три точки не се колинеарни, ќе сметаме дека определуваат единствена рамнина. На овој начин обезбедуваме правите и рамнините да се различни множества точки кои, според **A4** и **A6**, се и вистински подмножества од просторот  $\mathcal{P}$ .

Сите точки кои лежат на една иста рамнина се викаат **компланарни точки**.

Според **A7** секои три точки се компланарни.

### Задачи.

**1.** Нека  $A$  е произволна точка од просторот  $\mathcal{P}$ . Докажи дека постојат точки  $B$  и  $C$ , такви што  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни точки.

**2.** Нека  $A$  е произволна точка од просторот  $\mathcal{P}$ . Докажи дека постои права  $a$  која не минува низ точката  $A$ .

**3.** Нека  $A$  е произволна точка од просторот  $\mathcal{P}$ . Докажи дека низ  $A$  минуваат барем три различни рамнини.

## 7.5. Заемен однос на права и рамнина во простор

Нека е дадена права  $a$  и рамнина  $\Sigma$ . Нека  $A$  и  $B$  се две точки од правата  $a$  кои припаѓаат на рамнината  $\Sigma$ . Од досегашните аксиоми и теореми не може да се заклучи дали секоја точка од правата  $a$  припаѓа на рамнината  $\Sigma$ . Затоа ќе ја воведеме следнава аксиома:

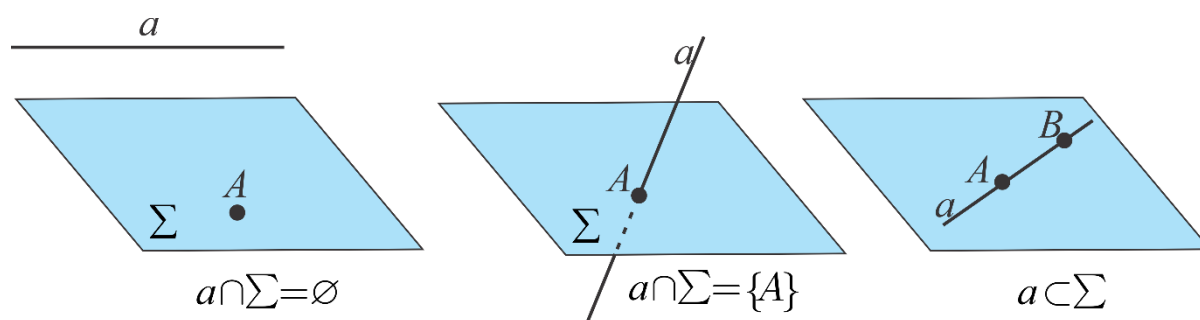
**A8.** Ако две точки од правата припаѓаат во рамнината, тогаш и секоја точка од правата припаѓа во рамнината.

Според тоа, за заемниот однос на правата  $a$  и рамнината  $\Sigma$  можни се следните ситуации (цртеж 32):

- $a$  и  $\Sigma$  немаат заеднички точки и велиме дека **правата не ја сече рамнината** т.е.  $a \cap \Sigma = \emptyset$
- $a$  и  $\Sigma$  имаат само една заедничка точка  $A$  и велиме дека **правата ја прободува рамнината** т.е.  $a \cap \Sigma = \{A\}$ .

Во ваков случај точката  $A$  се вика **пробод** или пресек на правата и рамнината.

- секоја точка од  $a$  ѝ припаѓа на  $\Sigma$  и велиме дека **правата лежи во рамнината** или рамнината минува низ правата т.е.  $a \subset \Sigma$ .



Цртеж 32

**Дефиниција.** Ако правата  $a$  и рамнината  $\Sigma$  немаат заеднички точки ( $a \cap \Sigma = \emptyset$ ) или правата лежи во рамнината ( $a \subset \Sigma$ ), тогаш велиме дека правата и рамнината се **паралелни**.

Во тој случај ја користиме ознаката  $a \parallel \Sigma$ .

**Теорема 2.** Нека  $a$  е права и  $A \notin a$  е точка од просторот  $\mathcal{P}$ . Тогаш постои единствена рамнина која минува низ точката  $A$  и правата  $a$ .

Од **A4** и **A5** следува дека на правата  $a$  постојат две точки  $B$  и  $C$ . Бидејќи  $A \notin a$  точките  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни. Според **A7** тие три точки одредуваат единствена рамнина. Правата  $a$  и таа рамнина имаат две заеднички точки  $B$  и  $C$ , па од **A8** следува дека рамнината минува низ правата. ♦

**Дефиниција.** Правата  $n$  што прободува рамнината  $\Sigma$  и е нормална на секоја права од  $\Sigma$  што минува низ прободот се нарекува **нормала на рамнината**.

За таа права важи својството: Ако една права  $n$  што ја прободува рамнината  $\Sigma$  е нормална на две прави од  $\Sigma$  што минуваат низ прободот, тогаш таа е нормална на  $\Sigma$ .

Нека  $A \notin \Sigma$  и низ  $A$  е повлечена правата  $p \perp \Sigma$ . Ако  $M$  е прободот на  $p$  со  $\Sigma$ , тогаш  $\overline{AM}$  се нарекува растојание од точката  $A$  до рамнината  $\Sigma$ .

**Дефиниција.** Нека точките  $A$  и  $B$  не лежат во  $\Sigma$ . Ако отсечката  $AB$  има со  $\Sigma$  заедничка внатрешна точка, тогаш велиме дека точките  $A$  и  $B$  се **разделени со рамнината**  $\Sigma$  или дека  $A$  и  $B$  **лежат од различни страни на**  $\Sigma$ .

Секоја рамнина го дели просторот на две непразни множества  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  такви што:

- кои било две точки од исто множество лежат на иста страна од просторот
- секои  $A \in \mathcal{P}_1$  и  $B \in \mathcal{P}_2$  лежат на различни страни од  $\Sigma$ .

**Дефиниција.** Фигурата образува од една рамнина и сите точки од просторот кои лежат на иста страна од таа рамнина се нарекува **полупростор**.

Рамнината се нарекува **граница** или **сид** на тој полупростор. Може да заклучиме дека секоја рамнина го разбива просторот на два полупростори со заеднички сид.



### Задачи

1. Во каков однос се правите  $a$  и  $b$ , ако е познато дека  $b \cap \Sigma = \{M\}$  и  $a \parallel \Sigma$ ?
2. Правата  $a$  лежи во рамнината  $\Sigma$ , правата  $b$  ја сече  $a$  и не лежи во  $\Sigma$ . Кои од следниве тврдења се точни?
  - а) Правата  $b$  и рамнината  $\Sigma$  имаат барем една заедничка точка.
  - б) Правата  $b$  и рамнината  $\Sigma$  имаат точно една заедничка точка.
  - в) Правите  $a$  и  $b$  определуваат единствена рамнина.
  - г) Правата  $a$  е паралелна со  $\Sigma$ .
3. Дадени се точките  $A, B, C, D$  и  $E$ . Рамнината  $\Sigma$  минува низ точките  $A$  и  $B$ , но не минува низ точките  $C, D$  и  $E$ .
  - а) Која од дадените точки не може да лежи на правата  $AD$ ?
  - б) Која од дадените точки не може да лежи на правата  $CB$ ?

### 7.6. Заемен однос на две рамнини во простор

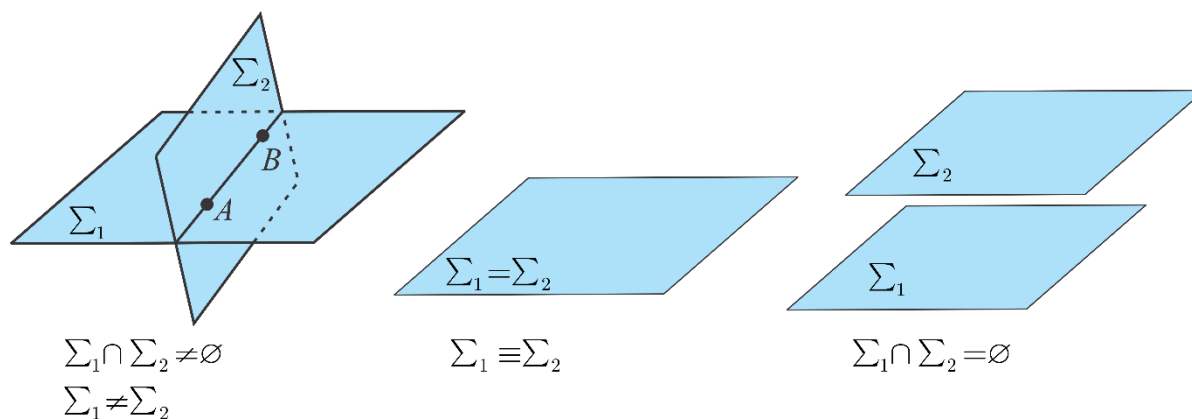
Нека  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  се две рамнини во просторот  $\mathcal{P}$ . За нивниот заемен однос можни се следниве ситуации (цртеж 33):

- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  и велиме дека рамнините немаат пресек
- $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$  и велиме дека рамнините се совпаѓаат т.е. тие се еднакви како множества точки
- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$  и рамнините  $\Sigma_1, \Sigma_2$  не се совпаѓаат

Во третиот случај од досегашните аксиоми не можеме да заклучиме колку најмалку точки ќе има пресекот на двете рамнини, па според тоа ја воведуваме следната аксиома:

**A9.** Ако рамнините  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.

Според оваа аксиома може да заклучиме дека ако две различни рамнини имаат заедничка точка, тогаш тие имаат и заедничка права т.е.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$ .



Цртеж 33

**Дефиниција.** Ако рамнините  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  немаат заеднички точки или се совпаѓаат, тогаш велиме дека тие се **паралелни**.

Паралелните рамнини ги означуваме со  $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ .

### Задачи

1. Дали може пресекот на две рамнини да се состои од точно пет различни точки?
2. Нека рамнините  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  се сечат во права  $a$ .
  - а) Дали постои права која ги прободува рамнините  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  и нема заеднички точки со правата  $a$ ?
  - б) Дали постојат бесконечно многу точки кои не лежат ниту на  $\Sigma_1$  ниту на  $\Sigma_2$ ?
3. Кое од следните тврдења е точно?
  - а) Кои било две прави што се паралелни на дадена рамнина, се паралелни меѓу себе,
  - б) Кои било две рамнини што се паралелни на дадена права, се паралелни меѓу себе.

## 7.7. Замен однос на две прави во простор

Нека  $a$  и  $b$  се две дадени прави во просторот  $\mathcal{P}$ . За нивниот замен однос можни се следните ситуации:

- $a \cap b = \emptyset$  и велиме дека правите немаат пресек
- $a \cap b = \{A\}$  и велиме дека правите се сечат во една точка
- пресекот содржи барем две точки

Ако пресекот содржи барем две точки, тогаш важи следнава:

**Теорема 3.** Ако две прави имаат барем две заеднички точки, тогаш тие се еднакви.

Навистина, ако со  $A$  и  $B$  ги означиме заедничките точки на правите  $a$  и  $b$ . Тогаш според **A5** постои единствена права што минува низ  $A$  и  $B$ . Правите  $a$  и  $b$  минуваат низ точките  $A$  и  $B$ , па од единственоста следува дека  $a = b$ . ♦

Во овој случај велиме дека правите  $a$  и  $b$  се совпаѓаат и пишуваме  $a \equiv b$ .

**Задача 1.** Докажи дека две различни прави имаат најмногу една заедничка точка.

**Решение.** Ако двете прави имаат две заеднички точки, тогаш од теорема 3 следува дека тие прави се совпаѓаат. ♦

**Теорема 4.** Низ две прави што се сечат минува единствена рамнина.

Нека правите  $a$  и  $b$  се сечат во точката  $C$ . Познато е дека на правата  $a$  лежат бесконечно многу точки, па нека  $A \neq C$  е една таква точка. Бидејќи  $A$  не лежи на правата  $b$ , од теорема 2, следува дека постои единствена рамнина  $\Sigma$  која минува низ  $A$  и  $b$ . Рамнината  $\Sigma$  и правата  $a$  имаат две заеднички точки  $A$  и  $C$ , па според **A8** рамнината  $\Sigma$  минува низ правата  $a$ . Секоја друга рамнина која минува низ некоја друга точка од  $a$ , која е различна од  $A$  и  $C$ , и низ правата  $b$ , исто така ја содржи и правата  $a$ . Значи

таа рамнина ги содржи точката  $A$  и правата  $b$ , па според теорема 2, таа рамнина се совпаѓа со  $\Sigma$ . ♦

На цртеж 34, а) се правите  $a$  и  $b$  се сечат.

Од **А6** следува дека за секоја рамнина може да избере точки кои не лежат во неа, па нека  $A, B, C$  и  $D$  се четири точки кои не лежат во рамнината  $\Sigma$ . Тогаш правите  $AB$  и  $CD$  не лежат во рамнината  $\Sigma$ , бидејќи ако има рамнина која ги содржи правите  $AB$  и  $CD$ , тогаш таа мора да ги содржи и точките  $A, B, C$  и  $D$ . Значи точна е следнава:

**Теорема 5.** Постојат прави кои не лежат во иста рамнина.

Ова значи дека во просторот постојат две различни ситуации кај две прави што не се сечат: правите не лежат или лежат во иста рамнина.

**Дефиниција.** Две прави што лежат во иста рамнина и не се сечат или се совпаѓаат се викаат **паралелни прави**.

Во овој случај пишуваме  $a \parallel b$ .

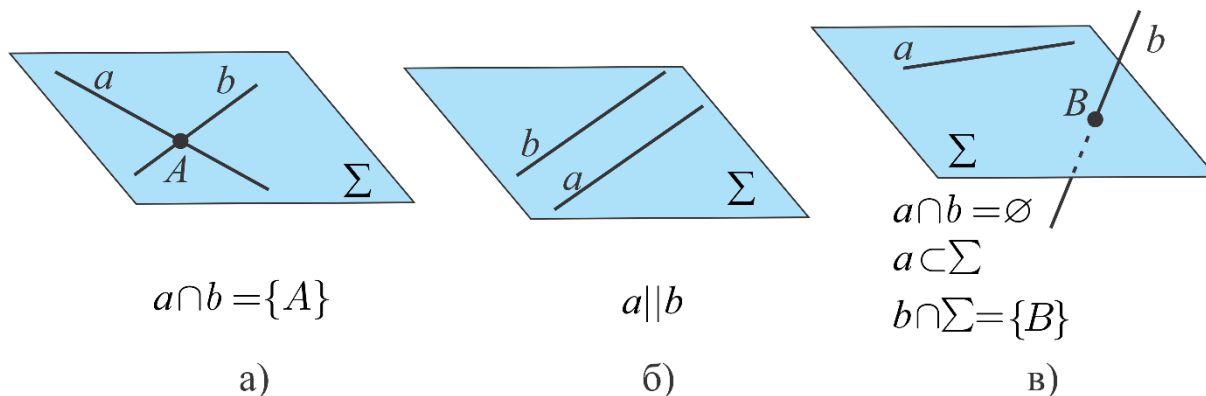
**Задача 2.** Две различни паралелни прави определуваат единствена рамнина. Докажи!

**Решение.** Нека  $a \parallel b$  и  $a \neq b$ . Според **А4** на правата  $a$  постои точка  $A$  и од  $a \parallel b$  следува дека  $A \notin b$ . Од теорема 2, заклучуваме дека постои единствена рамнина која минува низ правата  $b$  и точката  $A$ . ♦

На цртеж 34, б) се правите  $a$  и  $b$  се различни и паралелни.

**Дефиниција.** Две прави што не лежат во иста рамнина се викаат **разминувачки прави**.

Правите  $a$  и  $b$  на цртеж 34 в) се разминувачки.



Цртеж 34

### Задачи

1. Колку рамнини определуваат три прави кои минуваат низ иста точка?
2. Колку рамнини определуваат две точки и една права која не минува низ тие точки?

3. Правите  $a$  и  $b$  се сечат во една точка и лежат во рамнината  $\Sigma$ . Правата  $c$  ги сече двете прави. Дали и правата  $c$  мора да лежи во рамнината  $\Sigma$ ?

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Даден е правилен шестаголник  $ABCDEF$  и  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ . Изрази ги векторите  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}$  и  $\overrightarrow{BE}$ , со помош на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

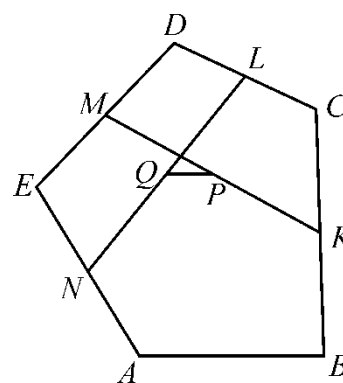
2. Упрости го изразот  $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$ .

3. Упрости го изразот  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$ .

4. Одреди го векторот  $\vec{x}$  од равенството  

$$\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{EL} + \vec{x} = \overrightarrow{MK}$$

5\*. Нека  $ABCDE$  е пентаголник, каде  $K, L, M$  и  $N$  се средини на страните  $BC, CD, DE$  и  $EA$ , а  $P$  и  $Q$  се средини на  $KM$  и  $LN$ , соодветно (цртеж 35). Докажи дека отсечките  $PQ$  и  $AB$  се паралелни и одреди го односот на нивните должини.



Цртеж 35

6. Докажи дека средините на основите и пресекот на дијагоналите на трапез лежат на иста права.

7. Нека  $E$  е средина на страната  $AB$  на паралелограмот  $ABCD$  и нека  $M$  е пресечна точка на  $AC$  и  $DE$ . Докажи дека  $\overline{AM} : \overline{MC} = 1 : 2$  и  $\overline{DM} : \overline{ME} = 2 : 1$ .

8. Ако  $A, B$  и  $C$  се три различни точки, тогаш дали може

а)  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ;

б)  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ?

9. Докажи дека постојат барем три прави кои не минуваат низ иста точка.

10. Докажи дека пет различни точки определуваат една, пет, шест, осум или десет прави.

11. Нека  $A, B, C$  и  $D$  се четири различни точки во просторот  $\mathcal{P}$ , од кои никои три не се колинеарни. Колку рамнини определуваат дадените точки?

12. Кои од следниве тврдења се точни?

а) рамнината е определена со три точки, б) рамнината е еднозначно определена со две различни прави, в) рамнината е еднозначно определена со права и точка.

## 8. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

Пред за започнеме со подетално изучување на геометриските тела и начините за пресметување плоштина и волумен кај нив, да се осврнеме накусо на поимот геометриско тело или само тело.

Геометриското тело мора да биде ограничено од сите страни. Ова значи дека тоа не може да се протега до бескрај во никоја насока и велиме дека е ограничено. Границата која го одвојува делот од просторот кој го зафаќа телото од останатиот дел, надвор од него се нарекува површина на телото. Според ова, геометриско тело е унија од внатрешниот дел од просторот и границата.

### 8.1. Поим за призма

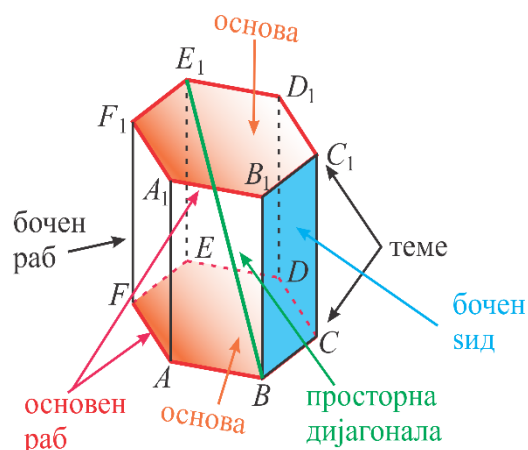
**Дефиниција.** Призма е рабесто геометриско тело ограничено со два складни и паралелни многуаголници и околку паралелограми колку што имаат страни многуаголниците.

Двата складни многуаголници што лежат на паралелните рамнини, се викаат **основи** или базиси, а паралелограмите **бочни** или околни сидови на призмата и за нив велиме дека ја образуваат нејзината **обвивка**. Страните на складните многуаголници се викаат **основни рабови**, а страните на паралелограмите се викаат **бочни рабови** или околни рабови. Заедничките точки на рабовите на призмата се викаат **темиња** на призмата (цртеж 1).

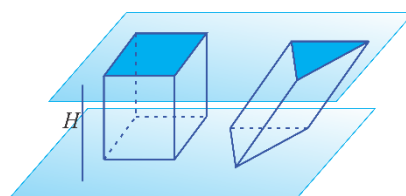
Според бројот на страните на основата, призмата може да биде: тристрана (триаголна), четиристрана, петстрана призма итн. Растојанието помеѓу основите на призмата се вика **висина** на призмата и се означува со  $H$  (цртеж 2).

**Пример 1.** На цртежот 3 е претставена седумстрана призма. Притоа,  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$  се паралелни рамнини на кои лежат основите,  $ABCDEFG$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ . Висина на призмата е  $\overline{D_1D_2}$ , каде  $D_1 \in \Sigma_1$ ,  $D_2 \in \Sigma$  и  $D_1D_2 \perp \Sigma$ . Бочни сидови се  $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, EDD_1E_1, FEE_1F_1, GFF_1G_1$  и

$GAA_1G_1$ , бочни рабови  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1$  и  $GG_1$ , а основни рабови



Цртеж 1



Цртеж 2

$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA,$

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1G_1, G_1A_1.$  ♦

Ако бочните рабови на призмата се нормални на основата, тогаш таа призма се вика **права призма**, а во спротивен случај таа се вика **коса призма**.

Права призма со основа или базис правилен многуаголник се вика **правилна призма**.

Правата што минува низ центрите (центарот на впишана и центарот на опишана кружница) на основите при правилна призма се вика **оска** на призмата (цртеж 4).

Призма со основа паралелограм се вика **паралелопипед**.

- Паралелопипедот има заемно паралелни и складни спротивни сидови.

- Дијагоналите на паралелопипед се сечат во една точка и се преполовуваат во неа.

Ако паралелограмите се правоаголници, тогаш се добива права призма која се вика правоаголен паралелопипед или **квадар**. Ако квадарот има еднакви рабови, тогаш тој се нарекува **коцка** (цртеж 5).

Кај секоја призма важи:

- сите бочни рабови се паралелни и еднакви меѓу себе, како отсечки од паралелни прави пресечени со две паралелни рамнини
- секои два основни раба кои лежат на ист бочен сид се паралелни и еднакви.

### Задачи.

1. Колку изнесува најмалиот број на сидови на една призма? Колку темиња и рабови има таа призма?

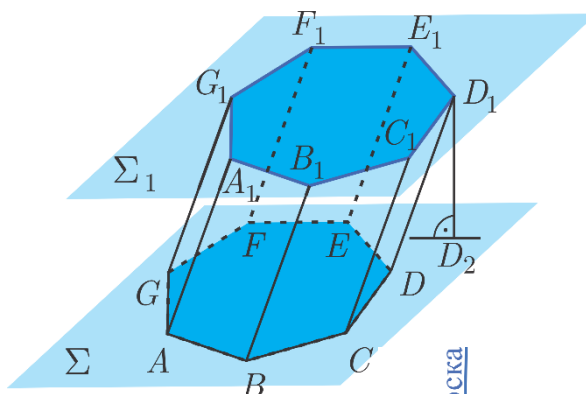
2. Дали постои призма кај која бројот на рабови е:

а) 3,                      б) 15,                      в) 13.

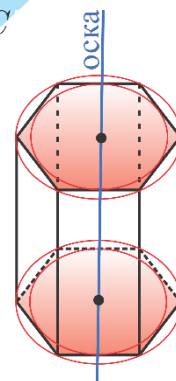
3. На цртеж 6 е дадена петстрана призма.

а) Напиши ги сите просторни дијагонали повлечени од темињата  $C_1$  и  $E$

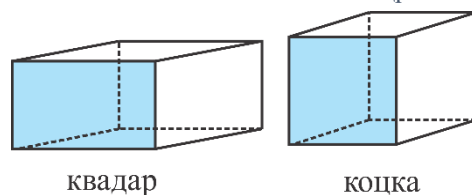
б) Напиши ги дијагоналите на бочните сидови  $ABB_1A_1$ ,  $CC_1D_1D$  и  $AA_1E_1E$ .



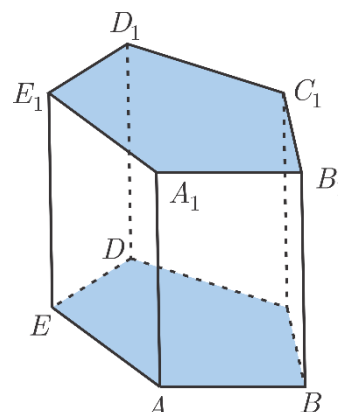
Цртеж 3



Цртеж 4



Цртеж 5



Цртеж 6

## 8.2. Пресеци на призма со рамнина

**Дефиниција.** Множеството на сите заеднички точки на геометриското тело и рамнината се вика **рамнински пресек** на телото.

Во стереометријата од посебен интерес се оние рамнински пресеци кои претставуваат многуаголник. Најчесто се среќаваат следните пресеци:

- **паралелен**, кој се добива кога рамнината е паралелна со основите на призмата, а добиениот многуаголник е складен со основите,
- **нормален**, кој се добива кога рамнината е нормална на бочните рабови на призмата, а добиениот многуаголник има ист број страни со основите,
- **дијагонален**, кој се добива кога рамнината минува низ два несоседни бочни раба, а добиениот многуаголник е паралелограм,
- **оскин**, кој се добива кога рамнината ја содржи оската на призмата, а добиениот многуаголник е паралелограм,
- **кос**, ако не е нормален, не е паралелен и рамнината ги сече сите бочни рабови на призмата, а добиениот многуаголник има ист број страни со основите.

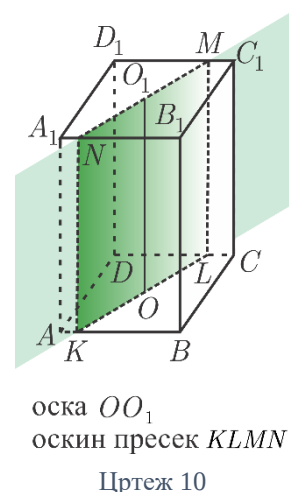
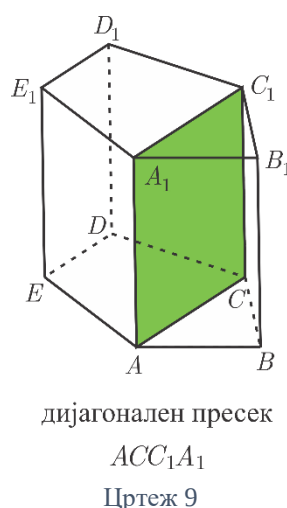
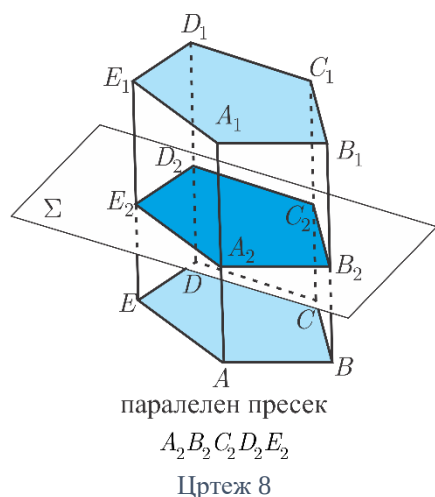
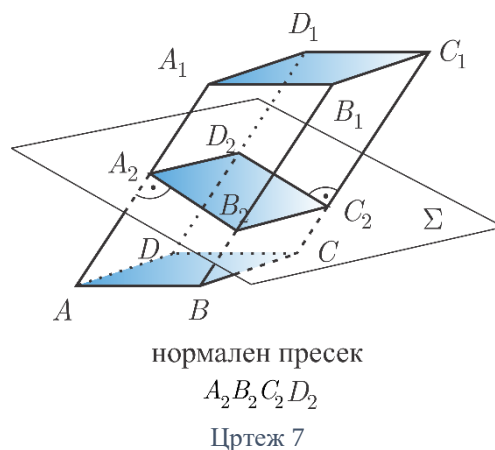
### Пример 1.

**а)** Нормален пресек кај четиристрана призма е прикажан на цртеж 7.

**б)** На цртеж 8 прикажан е паралелен пресек кај петстрана призма.

**в)** Дијагонален пресек кај петстрана призма е прикажан на цртеж 9.

**г)** На цртеж 10 е прикажан оскин пресек кај правилна четиристрана призма. Овој оскин пресек не е дијагонален. ♦



**Задача 1.** Дадена е коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  со страна  $a = 6\text{cm}$ . Пресметај ја плоштината на:

**а)** паралелниот пресек  $MNPQ$  кој минува низ точките  $M, N, P$  и  $Q$ , кои се средини на бочните рабови  $AA_1, BB_1, CC_1$  и  $DD_1$ , соодветно,

**б)** дијагоналниот пресек  $ACC_1 A_1$ ,

**в)** произволен пресек кој минува низ дијагоналата на основата и дијагоналите на два соседни бочни зида.

**Решение. а)** Паралелниот пресек е многуаголник складен со основата, па во овој случај кај коцката тој е квадрат со страна  $a = 6\text{cm}$  и неговата плоштина изнесува

$$P_1 = a^2 = 36\text{cm}^2 \text{ (цртеж 11).}$$

**б)** Дијагоналниот пресек кај коцка е правоаголник со страни бочен раб  $a = 6\text{cm}$  и дијагонала на основата

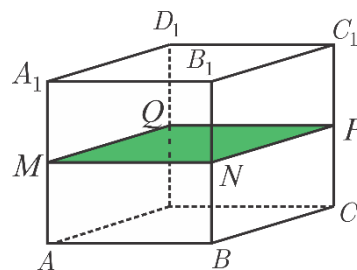
$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\text{cm}, \text{ па неговата плоштина е}$$

$$P_2 = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\text{cm}^2 \text{ (цртеж 12).}$$

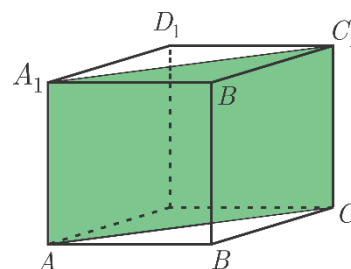
**в)** Произволниот пресек е рамностран триаголник со страни еднакви на дијагоналите на бочните сидови и основата т.е.

$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\text{cm}, \text{ па неговата плоштина изнесува}$$

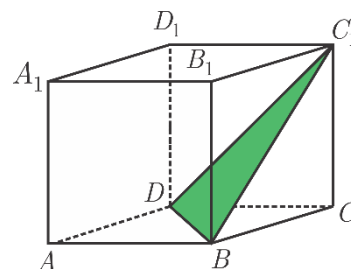
$$P_3 = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\text{cm}^2 \text{ (цртеж 13). } \blacklozenge$$



Цртеж 11



Цртеж 12



Цртеж 13

### Задачи.

**1.** Пресметај ја плоштината на дијагонален пресек на квадар со основни рабови  $5\text{cm}$  и  $12\text{cm}$  висина  $c = 10\text{cm}$ .

**2.** Пресметај ги основните рабови на квадар кај кој плоштината на основата е  $48\text{cm}^2$ , плоштината на дијагоналниот пресек е  $150\text{cm}^2$  и висината е  $15\text{cm}$ .

**3.** Висината на еден прав паралелопипед е  $30\text{cm}$ , а основата е ромб со страна  $13\text{cm}$  и дијагонали на основата кои се однесуваат како  $5:12$ . Пресметај ја плоштината на дијагоналните пресеци.

## 8.3. Плоштина и волумен на призма

### Плоштина на призма

**Дефиниција.** **Плоштина** на една призма е збир од плоштините на двете основи и плоштините на многуаголниците кои ја сочинуваат обвивката на призмата.

Ако плоштината на призмата ја означиме со  $P$ , плоштината на основата со  $B$  и плоштината на обвивката со  $M$ , тогаш  $P = 2B + M$

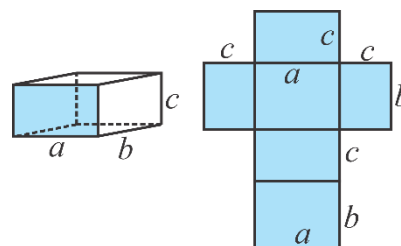


Притоа, ако призмата е права, нејзините сидови се правоаголници. Секој правоаголник има една страна која е и основен раб, а друга страна висина на призмата  $H$ . Според тоа, плоштината на обвивката е производ од периметарот на основата и висината т.е.  $M = L \cdot H$ .

Ако, пак, призмата е коса, тогаш нејзините сидови се паралелограми, па плоштината на обвивката е збир од плоштините на тие паралелограми. Плоштината на секој паралелограм е производ од една негова страна и соодветната висина спуштена кон таа страна.

**Задача 1.** Пресметај ја плоштината на квадар со страни  $a, b$  и  $c$ .

**Решение.** Основата е правоаголник со страни  $a$  и  $b$ , па  $B = ab$ . Бочните сидови се правоаголници и тоа два од нив со страни  $a$  и  $c$ , а другите со страни  $b$  и  $c$ , па  $M = 2ac + 2bc$  (цртеж 14). Според тоа



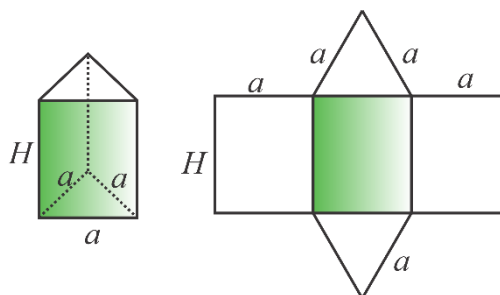
Цртеж 14

$$P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca). \blacklozenge$$

Коцката е квадар со еднакви рабови, па  $B = a^2$  и  $M = 4a^2$  т.е.  $P = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$ .

**Задача 2.** Пресметај ја плоштината на правилна тристрана призма со основен раб  $a$  и висина  $H$

**Решение.** Основите на призмата се два рамнострани триаголници (цртеж 15) чија плоштина е  $B = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ .



Цртеж 15

Обвивката е составена од три правоаголници со страни  $a$  и  $H$ , според тоа плоштината на обвивката е  $M = 3aH$ , а плоштината на целата

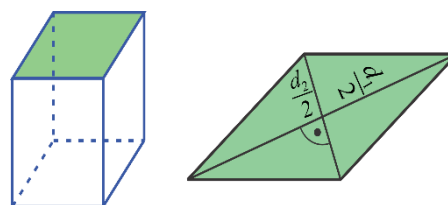
призма ќе биде:  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH. \blacklozenge$

**Задача 3.** Пресметај ја плоштината на четиристрана призма со основа ромб чии дијагонали се  $d_1 = 8\text{cm}$  и  $d_2 = 6\text{cm}$  и висина  $H = 10\text{cm}$ .

**Решение.** Плоштината на основите ќе ја пресметаме со формулата за плоштина на ромб:

$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24\text{cm}^2$ . Обвивката на призмата е составена од четири правоагол-

ници чии страни се висината на призмата  $H$  и основниот раб, односно страната на ромбот  $a$ . За да ја пресметаме страната на ромбот ќе ја примениме Питагоровата теорема (цртеж 16).



Цртеж 16

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16 + 9 = 25,$$

од каде  $a = 5\text{ cm}$ . Плоштината на обвивката е:

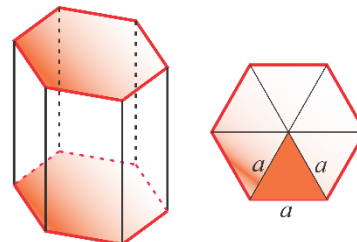
$M = 4aH = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200\text{ cm}^2$ , па плоштината на призмата е:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 24 + 200 = 248\text{ cm}^2. \blacklozenge$$

**Задача 4.** Пресметај ја плоштината на правилна шестстрана призма чии рабови се сите еднакви и имаат должина  $8\text{ cm}$ .

**Решение.** Според цртеж 17 основите на призмата се правилни шестаголници, чија плоштина е збирот од плоштините на 6 рамнострани триаголници, односно

$$B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2, \quad B = 96\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$



Цртеж 17

Обвивката на призмата е составена од 6 квадрати, според тоа плоштината на обвивката на призмата

$M = 6 \cdot 8^2 = 384\text{ cm}^2$ , па плоштината на призмата е:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 96\sqrt{3} + 384 = 192(2 + \sqrt{3})\text{ cm}^2. \blacklozenge$$

### Волумен на призма

Поимот волумен на геометриско тело веќе сте го изучиле. Познато е дека секое цврсто тело зафаќа дел од просторот во кој се наоѓа, како на пример каменот, зградата, крушата и сл. Течностите (сок, вода, вино, нафта и др.) исто така зафаќаат дел од просторот, но нивната форма зависи од садот во кој се ставени. Прво ќе се потсетиме на некои важни карактеристики на волуменот. Тој е позитивен број, складни просторни фигури (тела) имаат еднакви волумени, ако едно тело може да се подели на делови кои не се пресекуваат, тогаш неговиот волумен е збир од нивните волумени и коцка со страна  $1\text{ m}$  има волумен  $1\text{ m}^3$ . Основна единица мерка за волумен е  $1\text{ m}^3$ , а други мерки се:  $\text{dm}^3, \text{cm}^3, \text{mm}^3, \text{km}^3 \dots$

При работа со поимот волумен на тело, позначајна улога игра **Принципот на Кавалиери**: Ако две тела може да се постават така што нивните пресеци со било која рамнина паралелна со дадена рамнина имаат еднакви плоштини, тогаш тие две тела имаат еднакви волумени.

Волуменот на призма се пресметува со формулата  $V = B \cdot H$ , каде  $B$  е плоштина на основата, а  $H$  висина на призмата.

**Задача 5.** Пресметај го волуменот на квадар со страни  $a, b$  и  $c$ .

**Решение.** Основата на квадарот има плоштина  $B = ab$ , па  $V = B \cdot H = abc$ .  $\blacklozenge$

Коцката е квадар со исти рабови, па  $V = a^2 \cdot a = a^3$ .

**Задача 6.** Пресметај го волуменот на правилна тристрана призма со основен раб  $a = 6\text{ cm}$  и висина  $H = 9\text{ cm}$ .

**Решение.** Основата на призмата е рамностран триаголник (цртеж 15) со страна  $a = 6 \text{ cm}$ . Неговата плоштина е  $B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  или  $B = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Волуменот е  $V = 9\sqrt{3} \cdot 9 = 81\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . ♦

**Задача 7.** Пресметај го волуменот на правилна шестстрана призма со основен раб  $a = 6 \text{ cm}$  и висина  $H = 12 \text{ cm}$ .

**Решение.** Бидејќи  $B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , па  $V = 54\sqrt{3} \cdot 12 = 648\sqrt{3} \text{ cm}^3$  (цртеж 17). ♦

### Задачи

- Основата на права призма е рамнокрак трапез со основи  $14 \text{ cm}$  и  $4 \text{ cm}$  и висина  $13 \text{ cm}$ . Висината на призмата е  $15 \text{ cm}$ . Пресметај го волуменот на призмата.
- Основата на права призма е ромб со дијагонали  $3 \text{ cm}$  и  $4 \text{ cm}$  и дијагонала на бочниот сид  $6,5 \text{ cm}$ . Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата.
- Ако од внатрешниот дел на коцката се отстрани помала коцка, се добива шуплива коцка. Колку е волуменот на шупливата коцка, ако работ на внатрешната коцка е третина од работ на надворешната коцка?
- Основните рабови на квадар се однесуваат како  $4:3$ , а неговата висина е  $15 \text{ cm}$ . Пресметај го волуменот на квадарот, ако периметарот на основата е  $21 \text{ cm}$ .
- Основата на правоаголен паралелопипед е паралелограм чија една дијагонала е  $17 \text{ cm}$ , а страните се  $9 \text{ cm}$  и  $10 \text{ cm}$  и плоштината на паралелопипедот е  $334 \text{ cm}^2$ . Пресметај го волуменот на паралелопипедот.

## 8.4. Пирамида. Пресеци на пирамида со рамнина

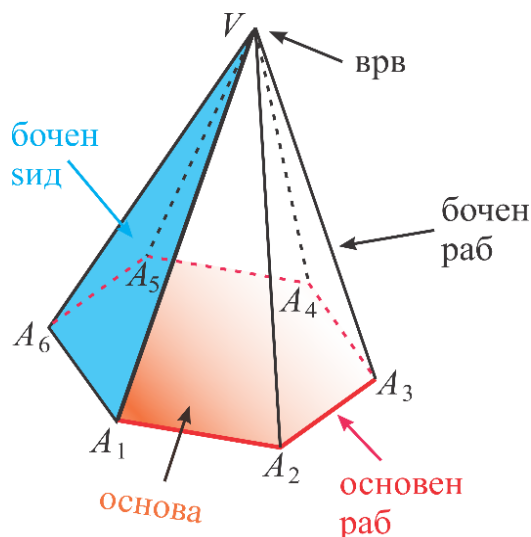
**Дефиниција.** Пирамида е рабесто геометриско тело ограничено со еден многуаголник и онолку триаголници колку што има страни многуаголникот.

Многуаголникот  $A_1 A_2 \dots A_n$  се вика **основа** или базис на пирамидата. Триаголниците  $A_1 A_2 V$ ,  $A_2 A_3 V$ ,  $A_3 A_4 V$ , ...,  $A_{n-1} A_n V$ , кои ги има колку што има страни многуаголникот, се викаат **бочни сидови** на пирамидата и заедно ја образуваат **обвивката** на пирамидата. Заедничкото теме на сите бочни сидови на пирамидата се вика **врв**.

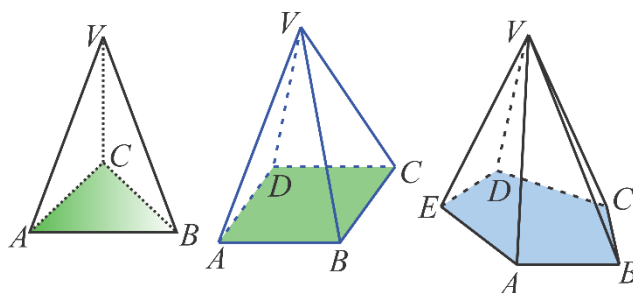
Страните на многуаголникот

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \dots, A_n A_1$$

се викаат **основни рабови**, а страните на триаголниците се викаат **бочни рабови** или околни рабови (цртеж 18).



Цртеж 18

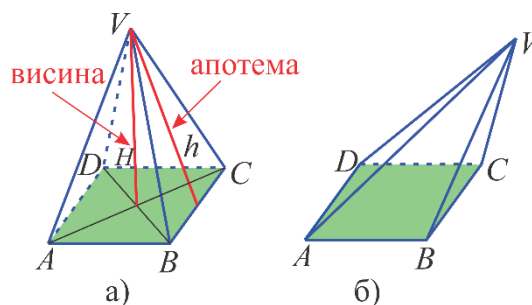


Цртеж 19

Во зависност од бројот на основните рабови (каков многуаголник е основата на пирамидата), слично како кај призмата, пирамидата може да биде: тристрана, четиристрана, петстрана, . . . (цртеж 19). Тристраната пирамида се вика уште и **тетраедар**.

Ако бочните рабови на пирамидата се еднакви, таа се вика **права пирамида** (цртеж 20, а)), а во спротивен случај, таа е **коса пирамида** (цртеж 20, б)).

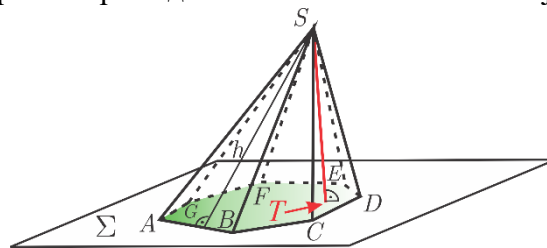
Права пирамида со основа правилен многуаголник се вика **правилна пирамида**. Тетраедарот на кој сите рабови му се меѓусебно еднакви се вика **правилен тетраедар**. Сите сидови на правилниот тетраедар се меѓу себе складни рамнострани триаголници. Растојанието од врвот до основата на пирамидата се вика **висина** на пирамидата  $H$ . Висината на бочен сид спуштена од врвот на пирамидата се вика бочна висина  $h$  (цртеж 20, а)). Правата која минува низ врвот на правилна пирамида и низ центарот на нејзината основа се вика **оска на пирамидата**.



Цртеж 20

Кај правилна пирамида сите бочни висини се еднакви. Тогаш бочната висина се нарекува **апотема** (цртеж 20, а)). Подножјето на висината на пирамидата е во центарот на опишаната кружница во основата, кој се совпаѓа со центарот на впишаната кружница во основата.

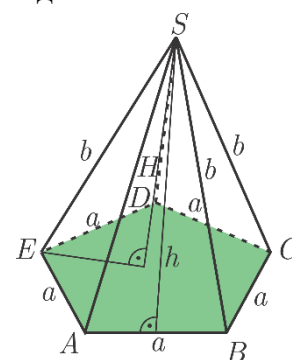
**Пример 1.** На цртеж 21 е претставена седумстрана пирамида со основа  $ABCDEFG$  која лежи во рамнината  $\Sigma$ , врв  $S$ , висина  $\overline{ST}$  (каде  $T \in \Sigma$ ), бочни сидови  $ABC, BCS, CDS, DES, EFS, GFS$  и  $AGS$ , како и бочна висина  $h$  на сидот  $ABS$ . Притоа, бочни рабови се  $AS, BS, CS, DS, ES, FS$  и  $GS$  а основни рабови се  $AB, BC, CD, DE, EF, FG$  и  $GA$ . ♦



Цртеж 21

Понатаму ќе ги разгледуваме само правите пирамиди, т.е. под пирамида ќе подразбираме права пирамида.

**Пример 2.** На цртеж 22 е претставена правилна петстрана пирамида со основен раб  $a$ , бочен раб  $b$ , апотема  $h$  и висина  $H$ . Ако е познато дека апотемата  $h = 24\text{cm}$ , а бочниот раб  $b = 26\text{cm}$ , тогаш со помош на Питагоровата теорема може да се одреди должината на основниот раб. Од тоа што сите бочни сидови на пирамидата се рамнокраки триаголници, следува дека апотемата го преполовува основниот раб т.е.

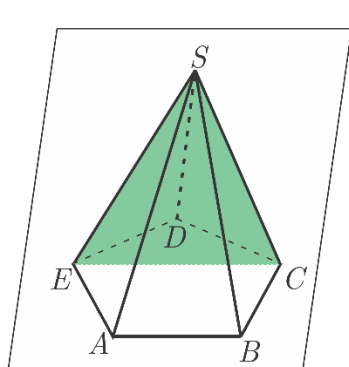
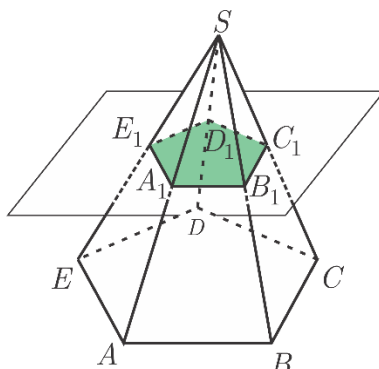
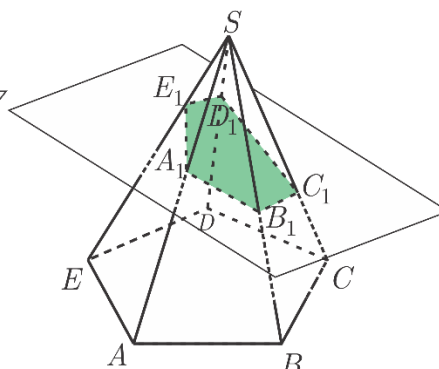


Цртеж 22

$$\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10\text{cm}, \text{ па } a = 20\text{cm}. \blacklozenge$$

Пресекот на пирамида и рамнина (цртеж 23) се нарекува:

- **дијагонален** ако рамнината минува низ два бочни раба што не лежат на ист бочен сид. Овој пресек е триаголник.
- **паралелен**, ако рамнината ги сече сите бочни рабови, не минува низ врвот, и е паралелна на рамнината на основата. Тој е многуаголник сличен со основата.
- **бочен** (или **кос**) ако рамнината ги сече сите бочни рабови, не минува низ врвот, и не е паралелна на рамнината на основата. Тој е многуаголник со ист број страни со основата.

дијагонален пресек  
 $ECS$ паралелен пресек  
 $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ кос пресек  
 $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ 

Цртеж 23

При паралелен пресек на пирамида со рамнина важи следнава теорема:

**Теорема 1.** Ако една пирамида ја пресечеме со рамнина паралелна со основата, тогаш:

- многоаголникот кој е пресек е сличен со многоаголникот на основата,
- бочните рабови и висината се поделени во ист однос,
- плоштините на основата и пресекот се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот.

Навистина, од паралелноста на соодветните отсечки (цртеж 24) следува дека многоаголниците имаат еднакви соодветни агли како агли со паралелни соодветни краци. Од сличноста на триаголниците  $A_1A_2S$  и  $B_1B_2S$ , ...,  $A_nA_1S$  и  $B_nB_1S$  следува дека

$$\overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{A_2A_3} : \overline{B_2B_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} : \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{A_nA_1} : \overline{B_nB_1}.$$

Според тоа многоаголниците  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$  се слични.

Познато е дека плоштините на слични триаголници се однесуваат како квадратите на соодветните страни, па лесно се добива тврдењето од теоремата. ♦

**Задача 1.** Пресметај ја плоштината на паралелниот пресек на пирамида, ако плоштината на основата е  $80\text{cm}^2$ , а рамнината на пресекот минува низ средината на висината.

**Решение.** Ако висината на пирамидата е  $H$ , а висината од пресекот до врвот  $H_1$ , тогаш  $\frac{H_1}{H} = \frac{1}{2}$ . Од теоремата следува

$$\text{дека } \frac{B_1}{B} = \frac{H_1^2}{H^2} = \frac{1}{4} \text{ т.е. } B_1 = \frac{1}{4}B = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20\text{cm}^2. \text{ ♦}$$

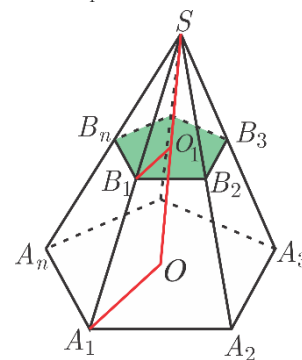
### Задачи

1. Одреди ја должината на апотемата кај правилна четиристрана пирамида, со основен раб  $a = 6\text{cm}$  и бочен раб  $s = 10\text{cm}$ .
2. Одреди ја плоштината на основата на пирамида, ако паралелниот пресек има плоштина  $B_1 = 25\text{cm}^2$ , а рамнината на пресекот е на растојание  $\frac{1}{4}$  од висината мерено од врвот на пирамидата.
3. Одреди ја висината на правилна четистрана пирамида, со основен раб  $14\text{cm}$  и бочен раб  $20\text{cm}$ .
4. Пресметај ја висината на правилна шестстрана пирамида, ако еден нејзин дијагонал пресек има плоштина  $60\text{cm}^2$  и минува низ центарот на основата, а бочниот раб има должина  $13\text{cm}$ .

## 8.5. Плоштина и волумен на пирамида

**Дефиниција.** Плоштината на пирамида е еднаква на збирот на плоштините на основата и плоштината на сите триаголници кои ја сочинуваат обвивката на пирамидата.

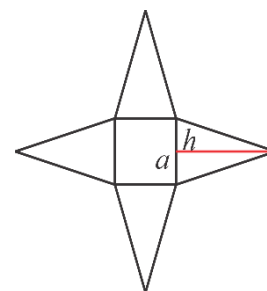
Ако со  $P$  ја означиме плоштина на пирамидата, со  $B$  плоштината на нејзината основа, а со  $M$  бочната плоштина, тогаш  $P = B + M$ .



Цртеж 24

**Задача 1.** Пресметај ја плоштината на правилна четиристрана пирамида.

**Решение.** Основата на пирамидата е квадрат чија плоштина е  $B = a^2$ . Обвивката е составена од четири рамнокраки триаголници и нејзината плоштина е  $M = 4 \frac{ah}{2}$ . Според тоа плоштината на пирамидата е  $P = a^2 + 4 \frac{ah}{2}$  (цртеж 25). ♦



Цртеж 25

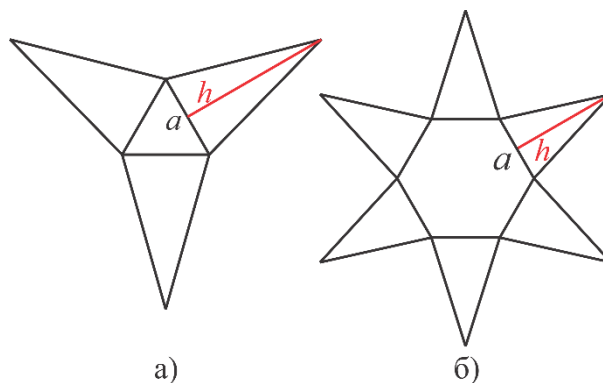
**Задача 2.** Пресметај ја плоштината на:

- а) правилна тристрана пирамида
- б) правилна шестстрана пирамида

**Решение.**

а) Основата на правилна тристрана пирамида е рамностран триаголник чија плоштина е  $B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ . Плоштината на обвивката е  $M = 3 \frac{ah}{2}$ , значи плошти-

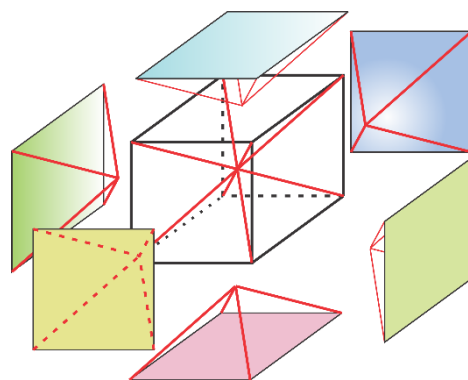
ната на пирамидата е  $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \frac{ah}{2}$  (цртеж 26 а).



Цртеж 26

б) Основата на правилна шестстрана пирамида е правилен шестаголник чија плоштина е  $B = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$ . Плоштината на обвивката е збир од плоштините на шест рамнокраки триаголници:  $M = 6 \frac{ah}{2}$  или  $M = 3ah$ . Според тоа, плоштината на шестстраната пирамида е:  $P = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} + 3ah$  (цртеж 26 б). ♦

Ќе разгледаме една коцка со страна  $a$  (цртеж 27). Во неа се повлечени сите просторни дијагонали кои се сечат во центарот  $O$  на коцката. Половина од нив се бочни рабови на шест четирирани пирамиди со врв  $O$  чии основи се сидовите на коцката. Бидејќи пирамидите се исти, нивниот волумен е шестина од волуменот на коцката:  $V = \frac{1}{6} a^3$ . Висината на секоја од тие 6 пирамиди е една половина од страната на коцката, односно  $H = \frac{1}{2} a$ . Според тоа волуменот на секоја



Цртеж 27

пирамида може да се запише и на друг начин:  $V = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} a \cdot a^2}_H$ ,  $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$  или

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$ , каде што  $B = a^2$  е плоштината на основата на пирамидата.

Волуменот на секоја пирамида се пресметува со формулата  $V = \frac{B \cdot H}{3}$ , каде  $B$  е плоштината на основата, а  $H$  е висината на пирамидата.

**Пример 1.** Правилна тристрана пирамида, со основен раб 6 cm, и висина 12 cm

има волумен  $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 12}{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . ♦

### Задачи

1. Пресметај го волуменот на пирамида чија основа е рамнокрак трапез со основи 8 cm и 14 cm и крак 5 cm, а висина  $H = 20$  cm.
2. Кај правилна четиристрана пирамида важи  $M = 20 \text{ dm}^2$  и  $B = 16 \text{ dm}^2$ . Одреди ја должината на апотемата  $h$ .
3. Волуменот на правилна шестстрана пирамида е  $6 \text{ cm}^3$ . Ако основниот раб е 1 cm, најди ја висината и бочниот раб на пирамидата.
4. Тристрана пирамида со висина 12 cm има за основа рамнокрак триаголник чија основа е 5 cm и крак 6,5 cm. Пресметај го волуменот на пирамидата.
5. Пресметај го волуменот на пирамида која има иста основа со правилна шестстрана призма, а врвот и е во центарот на другата основа на призмата, чиј основен раб е  $a = 5$  cm и висина  $H = 9$  cm.
6. Да се пресмета волуменот на пирамида, чија основа е правоаголник со страни 8 cm и 6 cm, ако секој бочен раб е 13 cm.

## 8.6. Плоштина и волумен на потсечена пирамида

**Дефиниција.** Делот од пирамидата ограничен со нејзината основа и еден паралелен пресек се нарекува **потсечена пирамида**.

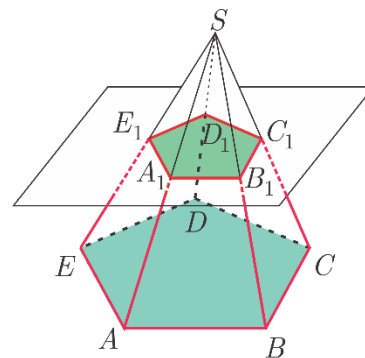
Притоа, кај потсечената пирамида, паралелните сидови се нарекуваат **основи**, а останатите страни се нарекуваат **бочни сидови (страни)**.

Страните на основите се **основни рабови**, а другите рабови кои не се основни се нарекуваат **бочни**. Бочните сидови ја формираат **бочната површина или обвивка** на потсечената пирамида.

Потсечената пирамида се нарекува **правилна** ако е добиена како паралелен пресек на правилна пирамида. Кај правилна потсечена пирамида бочните сидови се складни рамнокраки трапези.



**Пример 1.** На цртежот 28 е претставена потсечена петстрана пирамида со основи  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$ , основни рабови  $AB, BC, CD, DE, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$  и  $E_1A_1$ , бочни рабови  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$  и бочни сидови  $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CC_1D_1D, DD_1E_1E, EE_1A_1A$ . ♦



потсечена пирамида  
 $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$

Цртеж 28

**Дефиниција.** Плоштината на потсечената пирамида е еднаква на збирот од плоштините на двете основи и бочната плоштина.

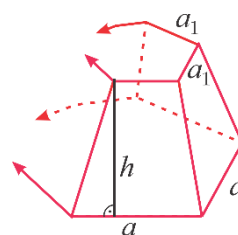
Ако со  $P$  ја означиме плоштината на потсечената пирамида,  $B$  е плоштината на поголемата основа, а  $B_1$  плоштината на пресекот, тогаш  $P = B + B_1 + M$ , каде  $M$  е бочната плоштина.

За бочната плоштина на правилна потсечена пирамида важи:

**Теорема.** Бочната плоштина на правилна потсечена пирамида е еднаква на производот од полузбирот на периметрите на двете основи и бочната висина (апотема).

Ако разгледаме една правилна потсечена  $n$ -аголна пирамида со основни рабови  $a$  и  $a_1$  и апотема  $h$ . Тогаш плоштината на еден бочен сид (од плоштина на рамнокрак трапез) е  $\frac{a+a_1}{2}h$ . Бидејќи бочните сидови на правилна потсечена пирамида се складни рамнокраки трапези, плоштината  $M$  на обвивката:

$$M = n \frac{a+a_1}{2} h = \frac{na+na_1}{2} h = \frac{L+L_1}{2} h.$$

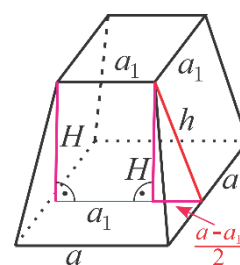


Цртеж 29

**Пример 2.** Плоштината на правилна потсечена четиристрана пирамида со основни рабови  $a = 18 \text{ cm}$  и  $a_1 = 8 \text{ cm}$  и висина  $H = 12 \text{ cm}$  изнесува

$$P = a^2 + a_1^2 + 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 1024 \text{ cm}^2,$$

$$\text{бидејќи } h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2} = 13 \text{ cm (цртеж 30).} \quad \blacklozenge$$



Цртеж 30

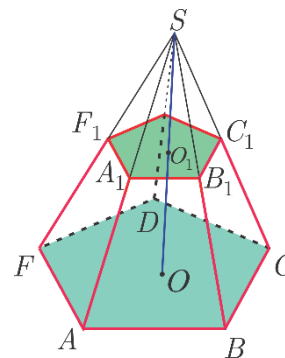
Формулата за волумен на потсечена пирамида се изведува имајќи во предвид дека волуменот на потсечената пирамида претставува разлика од волумените на двете пирамиди, целата и отсечената.

**Теорема.** Ако висината на потсечената пирамида е  $H$ , а плоштините на основите се  $B$  и  $B_1$ , тогаш нејзиниот волумен е:  $V = \frac{H}{3} (B + \sqrt{BB_1} + B_1)$ .

Навистина, дадена е произволна потсечена пирамида  $ABC...FA_1B_1C_1...F_1$  (цртеж 31). Ако ги продолжиме бочните рабови до нивната пресечна точка  $S$ , се добиваат две пирамиди  $SABC...F$  и  $SA_1B_1C_1...F_1$  чии основи се долната и горната основа на потсечената пирамида со плоштини  $B$  и  $B_1$ . Висините на добиените пирамиди се  $SO$  и  $SO_1$  со должини

$$\overline{SO_1} = x, \overline{SO_2} = H + x.$$

$$\text{Тогаш } V = \frac{1}{3}B(H+x) - \frac{1}{3}B_1x, \quad V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}(B-B_1)x$$



Цртеж 31

Оттука непознатата величина  $x$  ќе се определи користејќи ја теоремата за паралелните пресеци кај пирамидата, односно

$$\frac{B}{B_1} = \frac{(H+x)^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{H+x}{x}, \quad x = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}$$

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}(B-B_1) \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}H(\sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$$

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1). \quad \blacklozenge$$

Волуменот на правилна триаголна потсечена пирамида:  $V = \frac{H\sqrt{3}}{12}(a^2 + aa_1 + a_1^2)$

Волуменот на правилна четириаголна потсечена пирамида:  $V = \frac{H}{3}(a^2 + aa_1 + a_1^2)$

**Задача 1.** Најди ја плоштината на правилна потсечена пирамида ако се дадени апотемата  $h = 6$  cm, основните рабови  $a = 4$  cm и  $a_1 = 2$  cm и правилната потсечена пирамида е:

а) тристрана, б) четиристрана.

**Решение.** За правилната потсечена пирамида бараме:

$$\text{а) } P = B + B_1 + M = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + a_1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{a+a_1}{2}\right) \cdot h = (54 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

$$\text{б) } P = B + B_1 + M = a^2 + a_1^2 + 4\left(\frac{a+a_1}{2}\right) \cdot h = 92 \text{ cm}^2. \quad \blacklozenge$$

**Задача 2.** Најди ја висината на правилна четиристрана потсечена пирамида, ако е даден волуменот  $V = 304$  cm<sup>3</sup> и основните рабови  $a = 6$  cm и  $a_1 = 4$  cm.

$$\text{Решение. } V = \frac{H}{3} \cdot (B + B_1 + \sqrt{B \cdot B_1}), \text{ или } 304 = \frac{H}{3} \cdot (6^2 + 4^2 + \sqrt{6^2 \cdot 4^2}).$$

$$\text{Значи } 912 = H(36 + 16 + 24) \text{ т.е. } H = \frac{912}{76} = 12 \text{ cm}. \quad \blacklozenge$$

**Задачи**

1. Да се пресмета волуменот на правилна тристрана потсечена пирамида, со основни рабови 6 cm и 4 cm и висина на пирамидата  $H = 12$  cm.
2. Висината на потсечена пирамида е 15 m, а волуменот  $475 \text{ m}^3$ . Плоштините на основите се однесуваат како 4:9. Пресметај ги плоштините на основите.
3. Пресметај плошина и волумен на правилна четиристрана потсечена пирамида со основни рабови  $a = 12$ ,  $a_1 = 6$  и бочен раб  $s = 5$ .
4. Да се пресмета волуменот на правилна четиристрана потсечена пирамида, ако плоштините на основите се  $162 \text{ m}^2$  и  $72 \text{ m}^2$ , а плоштината на дијагоналниот пресек е  $150 \text{ m}^2$ .

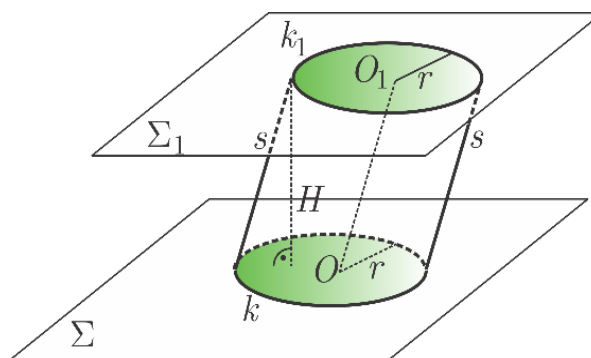
**8.7. Цилиндар. Пресеци на цилиндар со рамнина**

Нека  $k(O, r)$  и  $k_1(O_1, r)$  се два круга кои лежат во паралелните рамнини  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$ , соодветно. Тогаш множеството од сите отсечки  $XY$ , каде  $X \in k(O, r)$ ,  $Y \in k_1(O_1, r)$  и  $XY \parallel OO_1$  се нарекува **цилиндар**.

Отсечката  $OO_1$  се нарекува **оска на цилиндарот**. Круговите  $k$  и  $k_1$  се нарекуваат **основи на цилиндарот**. Тие се складни кругови, а нивниот радиус се нарекува **радиус на цилиндарот**.

Множеството од сите отсечки  $XY$  каде  $XY \parallel OO_1$ ,  $X$  лежи на кружницата  $k$  и  $Y$  лежи на кружницата  $k_1$  се нарекува **бочна површина на цилиндарот**. Секоја од тие отсечки  $XY$  (сите се со еднаква должина) се нарекува **генератриса**. Растојанието меѓу рамнините  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$  се нарекува **висина на цилиндарот**  $H$ .

На цртеж 32 е претставен цилиндар со генератриса со должина  $s$ , висина  $H$ , радиус  $r$  и оска  $OO_1$ .



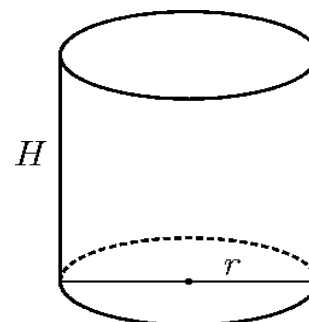
Цртеж 32

Ако  $OO_1 \perp \Sigma$ , тогаш цилиндарот се нарекува **прав**, а во спротивно **кос**.

Кај прав цилиндар  $s = H = \overline{OO_1}$ .

Ако дијаметрот на основата е еднаков на висината кај прав цилиндар, тогаш цилиндарот се нарекува **рамностран**. Значи кај рамностран цилиндар важи  $d = 2r = H$ .

На цртеж 33 е претставен рамностран цилиндар со висина  $H$  и радиус на основата  $r$ .

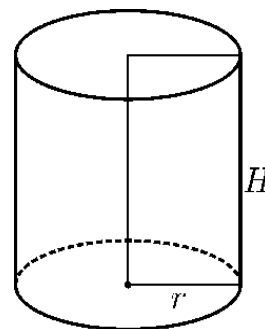

 $H = 2r$   
Цртеж 33

Прав цилиндар со висина  $H$  и радиус  $r$  се добива и со ротација на правоаголник со страни  $r$  и  $H$  околу страната со должина  $H$  (цртеж 34).

Ако рамнината  $\Sigma$ , различна од рамнините на основите, и паралелна на рамнините на основите, го сече цилиндарот, тогаш се добива **паралелен пресек на цилиндарот со рамнината** (цртеж 35 а). Пресекот е круг со радиус еднаков на радиусот на цилиндарот.

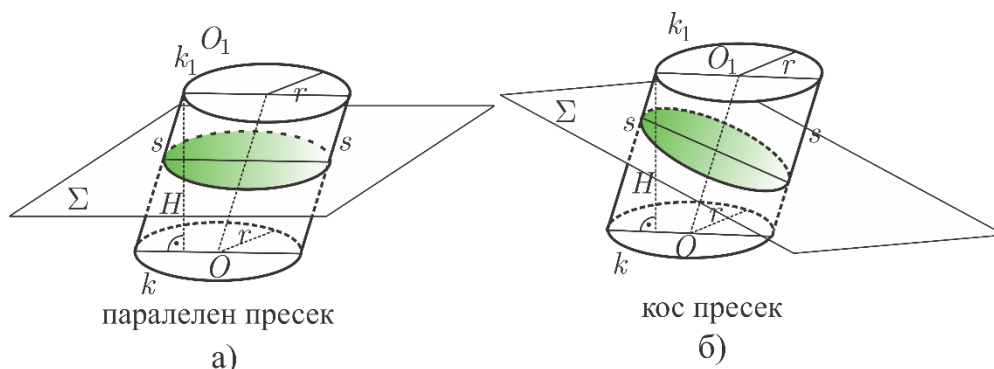
Кај прав цилиндар, оваа рамнина е нормална на висината.

Ако рамнината ги сече сите генератрисы на цилиндарот и не е паралелна со основите, пресекот се нарекува **кос** (цртеж 35 б).



Цртеж 34

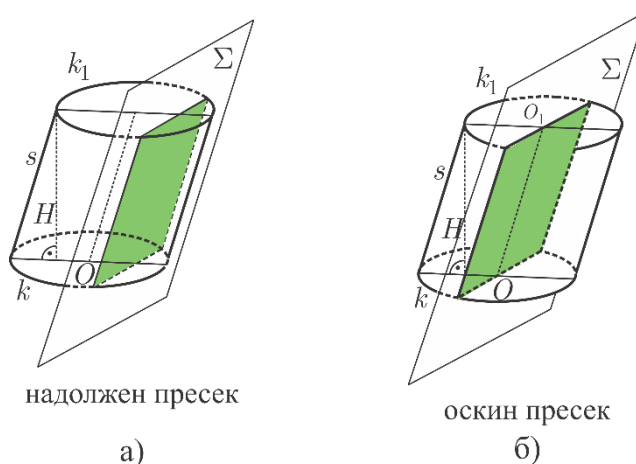
Пресекот на рамнина со цилиндар се нарекува **надолжен** (цртеж 36 а) ако рамнината на пресекот е паралелна со оската на цилиндарот. Притоа пресекот е паралелограм, а кај прав цилиндар овој пресек е правоаголник.



Цртеж 35

Ако рамнината ја содржи оската на цилиндарот, тогаш пресекот се нарекува **оскин** (цртеж 36 б). Овој пресек е паралелограм со страни генератрисата и дијаметарот на цилиндарот. Кај прав цилиндар оскиниот пресек е правоаголник, а кај рамностран цилиндар е квадрат.

**Задача 1.** Оскин пресек на цилиндар е квадрат со плоштина  $25 \text{ cm}^2$ . Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот.



Цртеж 36

**Решение.** Од тоа што оскиниот пресек е квадрат имаме дека  $d = H$ , каде  $d$  е дијаметарот на основата на цилиндарот. Значи од  $d^2 = 25$  се добива дека  $d = 5 \text{ cm}$  т.е.  $H = 5 \text{ cm}$  и  $r = \frac{d}{2} = 2,5 \text{ cm}$ . ♦

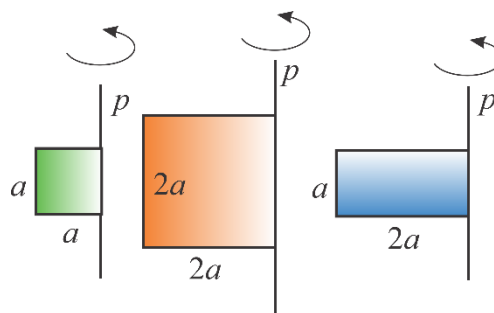
**Задачи**

1. Со ротирање на секоја од фигурите на цртеж 37 се добива цилиндар. Со користење на цртеж 37 одговори на следниве прашања:

- а) Колкава е висината на секој цилиндар?  
 б) Колкава е радиусот на кружницата?

2. Паралелен пресек на еден цилиндар има плоштина  $25\pi \text{ cm}^2$ . Колку е висок цилиндарот ако висината е три пати поголема од дијаметарот на основата?

3. Висината на еден цилиндар е 6 cm, а радиусот на основата 5 cm. Одреди ја плоштината на надолжен пресек кој е на растојание од 4 cm од оската на цилиндарот.



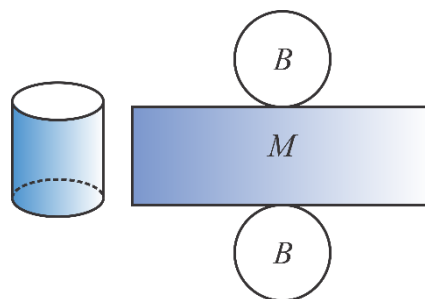
Цртеж 37

**8.8. Плоштина и волумен на цилиндар**

Површината на секој цилиндар се состои од два круга и една бочна површина.

Ако еден прав цилиндар го „отвориме“ по една негова генератриса и по кружниците на двете основи на рамнина како на цртеж 38 се добива **мрежата на цилиндарот**.

Значи мрежата на цилиндарот е составена од еден правоаголник и два складни круга.



Цртеж 38

Ако плоштината на основата ја обележиме со  $B$ , а плоштината на обвивката со  $M$ , тогаш плоштината на цилиндарот (цртеж 38) е:

$$P = 2B + M.$$

Бидејќи  $B$  е плоштина на круг со радиус  $R$ , тогаш  $B = R^2\pi$ , а плоштината на обвивката е плоштина на правоаголник со една страна должината на кружницата  $2R\pi$ , а другата висината на цилиндарот  $H$ , т.е.  $M = 2R\pi H$ . Според тоа:  $P = 2R^2\pi + 2R\pi H$  или  $P = 2R\pi(R + H)$ .

Оваа формула се користи само за пресметување плоштина на прав цилиндар. Понатаму под поимот цилиндар ќе подразбираме прав цилиндар.

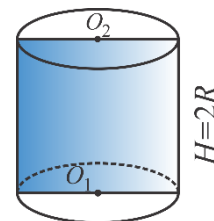
**Задача 1.** Пресметај ја плоштината на цилиндар со висина 8 cm и периметар на основата  $20\pi$  cm.

**Решение.** За да ја пресметаме плоштината на цилиндарот потребно е да го определиме радиусот од дадениот периметар т.е.  $L = 2R\pi = 20\pi$  од каде  $R = 10$  cm.

Значи  $P = 20\pi(10 + 8) = 360\pi \text{ cm}^2$ . ♦

**Задача 2.** Радиусот на основата на рамностран цилиндар е 75 mm. Пресметај ја плоштината на цилиндарот.

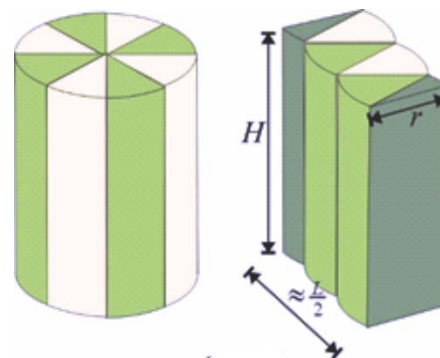
**Решение.** Од тоа што  $H = 2R$  (цртеж 39) за плоштината се добива  $P = 6R^2\pi$ , па  $P = 33750\pi \text{ mm}^2$ . ♦



Цртеж 39

Цилиндарот на цртеж 40 е разделен на еднакви делови, од кои е составно тело во форма на квадар. Колку деловите, на кои е поделен цилиндарот се помали, составеното тело од тие делови е поблиску до квадар. Волуменот на квадарот е  $V = B \cdot H$ , каде  $B$  е плоштината на основата, а  $H$  е висина на цилиндарот. Основата на квадарот е правоаголник со страни радиусот на основата и приближно половина од периметарот на кружницата  $\frac{2R\pi}{2} = R\pi$ .

Значи  $B = R\pi R = R^2\pi$ . Волуменот на квадарот е  $V = R^2\pi H$ . Можеме да заклучиме дека волуменот на цилиндарот е исто така  $B \cdot H$ , односно,  $V = R^2\pi H$ .



Цртеж 40

Волуменот  $V$  на цилиндар е еднаков на производот од плоштината на основата  $B = R^2\pi$  и неговата висина  $H$  т.е.  $V = R^2\pi \cdot H$ .

**Задача 3.** Пресметај го волуменот на рамностран цилиндар со радиус  $R$ .

**Решение.** Бидејќи  $H = 2R$ ,  $V = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$  ♦

**Задача 4.** Пресметај го волуменот на цилиндар со дијаметар на основата 60 cm и висина 7,5 dm.

**Решение.** Од  $d = 2R$  имаме дека  $R = 30$  cm, па  $V = 30^2\pi \cdot 75 = 67500\pi$  cm<sup>3</sup>. ♦

### Задачи

1. Пресметај ја плоштината на рамностран цилиндар, ако неговата бочна плоштина е 20 cm<sup>2</sup>.
2. Бочната плоштина на прав кружен цилиндар е  $192\pi$  cm<sup>2</sup>, а дијаметарот на основата е 20 cm. Да се пресмета волуменот на цилиндарот.
3. Да се пресмета плоштината на прав кружен цилиндар со волумен  $112\pi$  cm<sup>3</sup> и висина 7 cm.
4. Волуменот на прав кружен цилиндар е  $375\pi$  cm<sup>3</sup>, а висината е три пати поголема од радиусот на основата. Да се пресмета плоштината на цилиндарот.

## 8.9. Конус. Пресеци на конус со рамнина

Нека  $k(O, r)$  е круг кој лежи во рамнината  $\Sigma$ , а  $S$  е точка надвор од таа рамнина.

**Конус** се нарекува множеството од сите отсечки  $XS$ , каде  $X$  е точка од кругот  $k(O, r)$ . Отсечката  $OS$  се нарекува **оска на конусот**.

Ако  $OS \perp \Sigma$ , тогаш конусот се нарекува **прав**. Во спротивно тој се нарекува **кос** (цртеж 41).

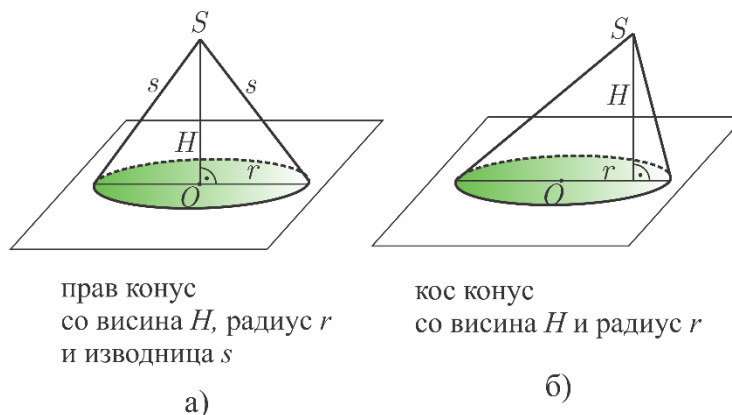
Отсечките  $XS$ , каде  $X$  лежи на кружницата  $k$  се нарекуваат **изводници (генератриси) на конусот**. Тие ја формираат **бочната површина** или **обвивката на конусот**.

Кај прав конус сите изводници се еднакви.

Кругот  $k(O, r)$  се нарекува **основа на конусот**, а  $r$  се нарекува **радиус на конусот**.

Растојанието од  $S$  до рамнината  $\Sigma$  се нарекува **висина на конусот**.

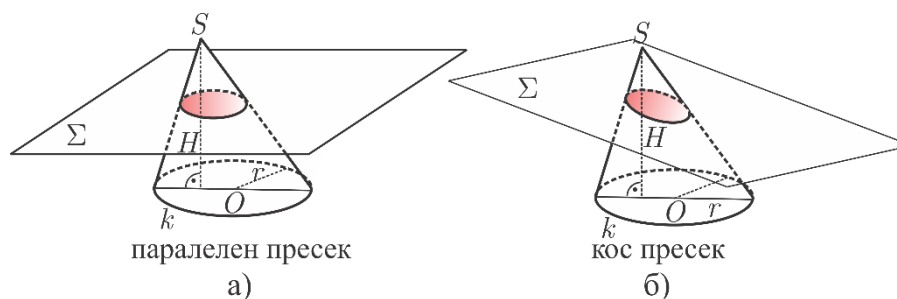
Правиот конус се нарекува **рамностран** ако изводницата е еднаква на дијаметарот на основата т.е.  $s = 2r$ .



Цртеж 41

Пресекот на конус со рамнина  $\Sigma$ , различна од рамнината на основата, се нарекува:

- **паралелен**, ако  $\Sigma$  е паралелна на рамнината на основата, не минува низ  $S$ , ги сече сите изводници. Добиениот пресек е круг (цртеж 42 а).
- **кос**, ако  $\Sigma$  не е паралелна на рамнината на основата, не минува низ  $S$  и ги сече сите изводници (цртеж 42 б).

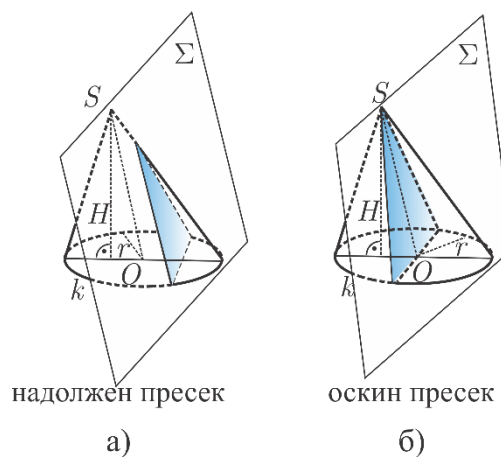


Цртеж 42

• **надолжен**, ако рамнината што го сече конусот е паралелна со оската на конусот. Добиениот пресек е триаголник, а кај прав конус е рамнокрак триаголник (цртеж 43 а).

• **оскин**, ако рамнината што го сече конусот ја содржи оската на конусот. Пресекот кај прав конус е рамнокрак триаголник (цртеж 43 б).

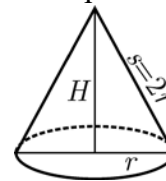
**Задача 1.** Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на рамностран конус со радиус на основата  $r$ .



Цртеж 43

**Решение.** Бидејќи  $s = 2r$  и  $d = 2r$ , следува дека оскиниот пресек е рамностран триаголник со страна  $2r$ . Плоштината на тој триаголник е

$$P_1 = \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3} \quad (\text{цртеж 44}). \blacklozenge$$



Цртеж 44

Понатаму ќе работиме само со прав конус т.е. под конус ќе подразбираме само прав конус.

При паралелен пресек на конус со рамнина важи следнава теорема:

**Теорема 1.** Ако еден конус го пресечеме со рамнина паралелна со основата, тогаш:

- изводницата (генератрисата) и висината се поделени во ист однос,
- плоштините на основата и пресекот се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот.

Навистина, нека рамнината  $\Sigma_1$ , ја пресекува висината  $OS$  во точка  $O_1$ , а изводницата  $SM$  во  $M_1$  (цртеж 45). Бидејќи  $\Sigma_1 \parallel \Sigma$  следува дека  $OM \parallel O_1M_1$  т.е.  $\Delta SOM \sim \Delta SO_1M_1$ .

Од сличноста на овие триаголници имаме:

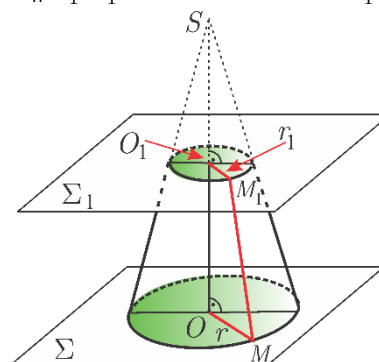
$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SM_1}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}. \text{ Ако } B \text{ е плоштина на основата, а } B_1$$

плоштина на пресекот,  $r$  и  $r_1$  се радиусите на основата

$$\text{и пресекот, соодветно, тогаш } \frac{B_1}{B} = \frac{r_1^2 \pi}{r^2 \pi} \text{ т.е. } \frac{B_1}{B} = \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Од  $\Delta SOM \sim \Delta SO_1M_1$  следува:

$$\frac{\overline{O_1M_1}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{\overline{SO_1^2}}{\overline{SO^2}} \Rightarrow \frac{B_1}{B} = \frac{\overline{SO_1^2}}{\overline{SO^2}}. \blacklozenge$$



Цртеж 45

**Задача 2.** Даден е конус со радиус  $r$ . Одреди ја плоштината на паралелен пресек кој е на висина половина од висината на конусот.

**Решение.** Ако  $r$  е радиус на конусот,  $r_1$  радиус на паралелниот пресек и  $H$  висина на конусот, тогаш  $H_1 = \frac{H}{2}$  е висината на паралелниот пресек, па од теорема 1 следува дека

$$\frac{B}{B_1} = \frac{H^2}{H_1^2}, \text{ од каде се добива дека } \frac{B}{B_1} = 4 \text{ т.е. } B_1 = \frac{B}{4} = \frac{r^2 \pi}{4}. \blacklozenge$$

**Задачи.**

1. Пресметај ја плоштината на оскин пресек кај конус со радиус 6 cm и генератриса 10 cm.

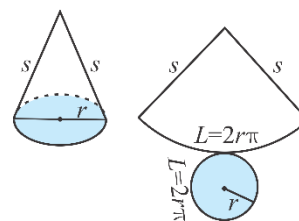
2. Периметарот на оскиниот пресек на рамностран конус е 12 cm. Одреди ги радиусот и висината на конусот.



3. Одреди ја плоштината на оскиниот пресек на конус со радиус 10 cm, ако аголот меѓу изводницата и рамнината на основата е  $45^\circ$ .
4. Висината на конусот е 15 cm, а периметарот на оскиниот пресек е 90 cm. Одреди го радиусот на конусот.

### 8.10. Плоштина и волумен на конус

Ако еден конус го пресечеме по една генератриса и по кружница на основата и го отвориме како на цртеж 46 се добива **мрежата на конусот**. Од цртеж 46 можеме да видиме дека мрежата на конусот со радиус  $r$  и генератриса  $s$  се состои од 2 дела: круг со радиус  $r$ , кој е основа на конусот и обвивката на конусот или бочната површина. Обвивката на конусот е дел од круг со радиус  $s$ , кој се вика кружен исечок.



Цртеж 46

Плоштината на основата на конусот е круг (цртеж 46), па имаме  $B = r^2\pi$ . Обвивката на конусот е кружен исечок, чија плоштина е  $M = 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = r\pi s$ .

Плоштина на конус е збир од плоштините на основата и обвивката  $P = B + M$  т.е.

$$P = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s).$$

**Задача 1. а)** Пресметај ја плоштината на конус со радиус  $r = 5$  cm и генератриса  $s = 10$  cm,

**б)** Плоштината на конус е  $24\pi$  cm<sup>2</sup>. Радиусот на конусот е 3 cm. Одреди ја генератрисата  $s$  на конусот,

**в)** Пресметај ја плоштината на конус со радиус  $r = 5$  cm и висина  $H = 12$  cm.

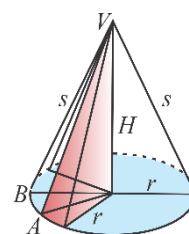
**Решение. а)**  $P = 5\pi(5 + 10) = 75\pi$  cm<sup>2</sup>, **б)**  $24\pi = 3\pi(3 + s) \Rightarrow s = 5$  cm,

**в)** Од Питагоровата теорема следува дека

$$s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}, \text{ па } P = 5\pi(5 + 13) = 90\pi \text{ cm}^2. \blacklozenge$$

Знаеме дека конус со радиус  $r$  и висина  $H$  се добива кога правоаголен триаголник со катети  $r$  и  $H$  се врти околу катетата  $H$ . Ако го разгледаме телото што се добива од две блиски положби на триаголникот при неговата ротација, ќе видиме дека личи на тристрана пирамида со висина  $H$ .

Основата на таа пирамида се помалку ќе се разликува од триаголник, доколку растојанието меѓу  $A$  и  $B$  (цртеж 47) е помало. Волуменот на еден таков дел приближно е еднаков на волуменот на тристраната пирамида  $ABOV$ . Нека плоштините на основите на тие делови се  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .



Цртеж 47

Значи волуменот на конусот ќе биде збир од волумените на сите тие делови, т.е.

$$V = \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}B_2H + \frac{1}{3}B_3H + \dots + \frac{1}{3}B_nH$$

$$V = \frac{1}{3}H(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)$$

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

Ако во формулата за волумен замениме  $B = r^2\pi$  ќе добиеме  $V = \frac{r^2\pi H}{3}$ .

**Пример 1. а)** Волуменот на конус со радиус  $r = 9$  cm и висина  $H = 20$  cm изнесува

$$V = \frac{9^2\pi \times 20}{3} = 540\pi \text{ cm}^3.$$

**б)** Конус со висина 5 cm и волумен  $125\pi \text{ cm}^3$  има радиус  $r^2 = \frac{3 \cdot 125\pi}{5\pi} = 75$ . Значи

$$r = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}. \blacklozenge$$

### Задачи

1. Пресметај ја плоштината на конус, ако:

а)  $r = 6$  cm,  $H = 8$  cm, б)  $s = 29$  cm,  $H = 21$  cm, в)  $d = 1,4$  cm,  $H = 2,4$  cm.

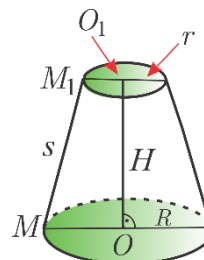
2. Пресметај ја генератрисата на конус, ако  $M = 255,3\pi \text{ cm}^2$  и  $d = 7,4$  cm.

3. Пресметај го волуменот на рамностран конус ако радиусот на конусот е 9 cm.

4. Пресметај го волуменот на конус, ако изводницата е 17 cm, а периметарот на основата е 16π cm.

## 8.11. Плоштина и волумен на потсечен конус

Плоштината на потсечениот конус е еднаква на збирот од плоштината на двете основи и бочната површина (обвивката)  $P = B + B_1 + M$  каде што  $B$  и  $B_1$  се плоштини на основите, а  $M$  е бочната површина. Ако со  $R$  и  $r$  ги означиме радиусите на основите, нивните плоштини ќе бидат  $B = R^2\pi$  и  $B_1 = r^2\pi$  (цртеж 48).



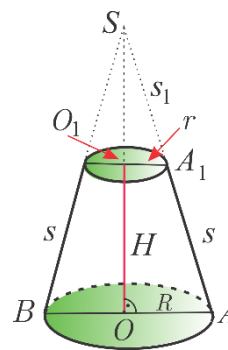
Цртеж 48

За бочната плоштина на правиот потсечен конус важи следнава :

**Теорема.** Бочната плоштина  $M$  на потсечен конус со радиуси на основите  $R$  и  $r$  и генератриса  $s$  е  $M = \pi s(R + r)$ .

Навистина, нека потсечениот конус е добиен од прав конус со врв  $S$  и основа кругот  $k(O, R)$  и паралелниот пресек кругот  $k_1(O_1, r)$ . Со  $s_1$  ја означуваме генератрисата на отсечениот конус со врв  $S$  и основа  $k_1(O_1, r)$  (цртеж 49). Тогаш генератрисата на целиот конус е  $s + s_1$ . Бочната плоштина  $M$  на потсечениот конус ја добиваме како разлика од бочните плоштини на двата конуса, односно:

$$M = R\pi(s + s_1) - r\pi s_1 = R\pi s + \pi s_1(R - r).$$



Цртеж 49

Генератрисата  $s_1$  ќе ја изразиме во зависност од  $R, r$  и  $s$  за што ќе го разгледаме оскиниот пресек на конусот  $ABC$ .

$$\text{Од } \triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S \text{ следи: } \frac{R}{r} = \frac{s+s_1}{s_1} \Rightarrow s_1 R = rs + rs_1 \Rightarrow s_1(R-r) = rs \Rightarrow s_1 = \frac{rs}{R-r}$$

Со замена во  $M$  се добива:

$$M = R\pi s + rs(R-r) \Rightarrow M = R\pi s + \pi(R-r) \frac{rs}{R-r} \Rightarrow M = \pi s(R+r)$$

Значи, плоштината  $P$  на потсечениот конус ќе биде:

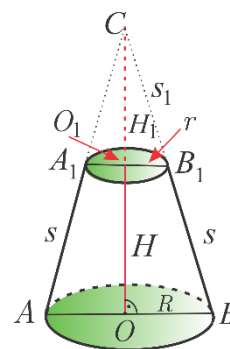
$$P = R^2\pi + r^2\pi + \pi s(R+r) \text{ т.е. } P = \pi(R^2 + r^2 + s(R+r)). \blacklozenge$$

Волуменот на потсечениот конус се пресметува со помош на формулата

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Навистина, нека потсечениот конус е добиен од конусот со врв  $C$  чија основа е кругот  $k(O, R)$  и паралелниот пресек кругот  $k_1(O_1, r)$ ,  $H$  е висина на потсечениот конус,  $H_1$  висина на одсечениот конус со врв  $C$  и основа кругот  $k_1(O_1, r)$  (цртеж 50). Тогаш висината на целиот конус е  $H + H_1$ , а волуменот на потсечениот конус е еднаков на разликата од волуменот на целиот конус и отсечениот конус односно:

$$V = \frac{R^2\pi(H + H_1)}{3} - \frac{r^2\pi H_1}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2H + (R^2 - r^2)H_1)$$



Цртеж 50

Висината  $H_1$  на потсечениот конус може да се изрази со  $R, r$  и  $H$ , ако го разгледаме оскиниот пресек  $CAB$  на конусот.

Од сличноста на триаголниците  $AOC$  и  $A_1O_1C$  следува:

$$\frac{R}{r} = \frac{H + H_1}{H_1} \Rightarrow H_1 R = rH + rH_1 \Rightarrow H_1(R-r) = rH \Rightarrow H_1 = \frac{rH}{R-r}$$

Со замена во:  $V = \frac{\pi}{3}(R^2H + (R^2 - r^2)H_1)$  се добива:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2H + (R^2 - r^2)\frac{rH}{R-r}\right) = \frac{\pi}{3}\left(R^2H + \frac{(R-r)(R+r)rH}{R-r}\right) = \frac{\pi}{3}(R^2H + (R+r)rH) \text{ т.е.}$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2). \blacklozenge$$

**Задача 1.** Висината на прав пресечен конус е  $H = 24$  cm, а генератрисата  $s$  и радиусите  $R$  и  $r$  на основите се однесуваат како  $5:4:1$ . Пресметај ја плоштината на обвивката на конусот.

**Решение.** Од условот  $s:R:r = 5:4:1$  следува дека  $s = 5k, R = 4k$  и  $r = k$ , за некој позитивен реален број  $k$ . Да го означиме оскиниот пресек со  $ABCD$  (цртеж 51). Ако од  $D$  спуштиме нормала на  $AB$  и подножјето го означиме со  $M$ , тогаш  $DM = H$ ,  $AM = R - r$  и од правоаголникот триаголник  $AMD$  се добива:

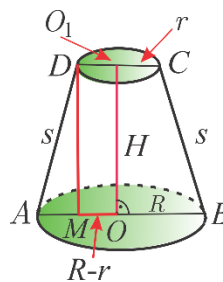
$$H^2 = s^2 - (R - r)^2 \text{ т.е. } 24^2 = 25k^2 - 9k^2, \text{ од каде } k = 6. \text{ Значи}$$

$$s = 30 \text{ cm}, R = 24 \text{ cm} \text{ и } r = 6 \text{ cm}, \text{ па } M = 30\pi(24 + 6) = 900\pi \text{ cm}^2. \blacklozenge$$

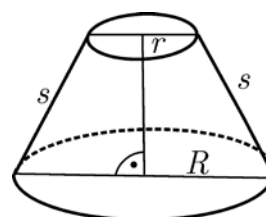
**Задача 2.** Одреди го волуменот на потсечен конус со радиуси на основите  $R = 13$  cm,  $r = 8$  cm и генератриса  $s = 13$  cm.

**Решение.** Од  $s^2 = H^2 + (R - r)^2$  со замена на вредностите се добива  $H = 12$  cm. Според тоа

$$V = \frac{12\pi}{3}(13^3 + 13 \cdot 8 + 8^2) = 1348\pi \text{ cm}^3. \blacklozenge$$



Цртеж 51



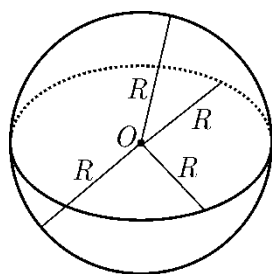
Цртеж 52

### Задачи

- Одреди ја бочната плоштината на потсечен конус, со висина 12 cm и радиусите на основите 10 cm и 5 cm.
- Одреди ја плоштината на обвивката на потсечен конус ако неговата генератриса зафаќа агол од  $30^\circ$  со основата, а плоштината на оскиниот пресек е  $200 \text{ cm}^2$ .
- Колку литри вода собира кофа со форма на потсечен конус со дијаметри на основите 12 cm и 20 cm и висина 24 cm, ако е познато дека  $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ ?
- Рамнокрак трапез со основи 7 cm и 17 cm и плоштина од  $144 \text{ cm}^2$  ротира околу својата оска. Одреди го волуменот на добиеното тело.

## 8.12. Сфера и топка. Плоштина и волумен

**Дефиниција.** Множеството точки во просторот кои се на исто растојание од дадена точка се нарекува **сфера**.

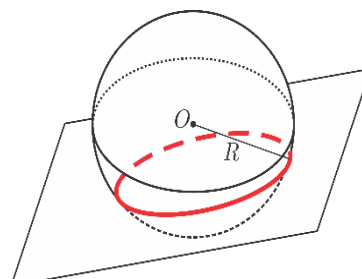


Цртеж 53

Дадената точка се нарекува **центар на сферата**, растојанието се нарекува **радиус на сферата**.

Обично сферата со центар во  $O$  и радиус  $R$  ќе ја означуваме со  $S(O, R)$  (цртеж 53).

Ако рамнина и сфера се сечат во повеќе од една точка, тогаш нивниот пресек е **кружница** (цртеж 54).



Цртеж 54

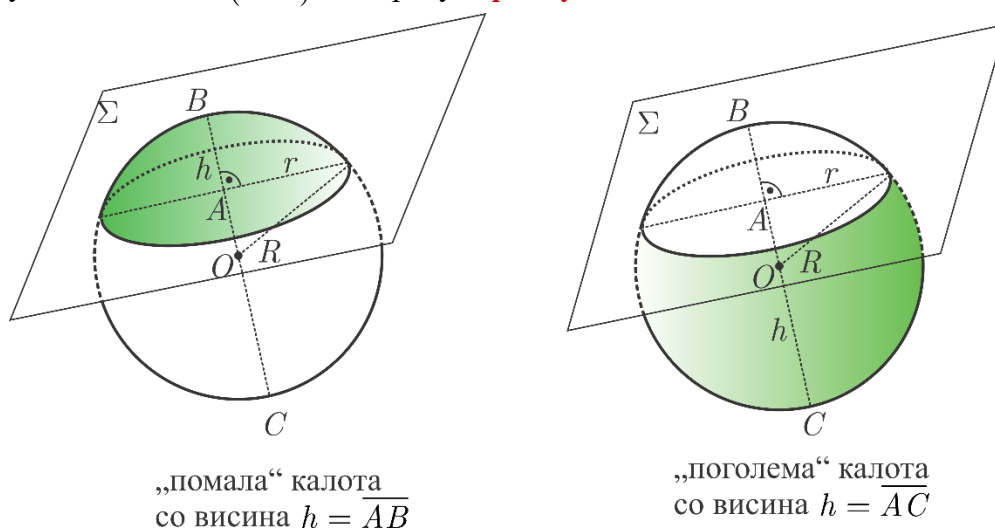
**Пример 1.** Пресеците кои се еднакво оддалечени од центарот на сферата имаат еднакви радиуси, бидејќи растојанието од центарот до секој пресек е еднакво, следува дека и дијаметрите на пресеците се еднакви.

Нека рамнината  $\Sigma$  ја сече сферата  $S(O, R)$  во повеќе од една точка и  $\Sigma$  не минува низ  $O$ . Деловите од сферата што ги отсекува рамнината се нарекуваат **калоти**. Во калотата припаѓа и кружницата  $\Sigma \cap S(O, R)$  (цртеж 55).

Ако рамнината минува низ центарот  $O$  добиените делови се нарекуваат **полусфери**.

Нека  $p$  е нормалата на  $\Sigma$  што минува низ  $O$  и нека  $\{A\} = p \cap \Sigma$  и  $\{B, C\} = p \cap S(O, R)$ .

Растојанието  $h = \overline{AB}$  (т. е.  $h = \overline{AC}$ ) се нарекува **висина на калотата**. Радиусот  $r$  на кружницата  $\Sigma \cap S(O, R)$  се нарекува **радиус на калотата**.

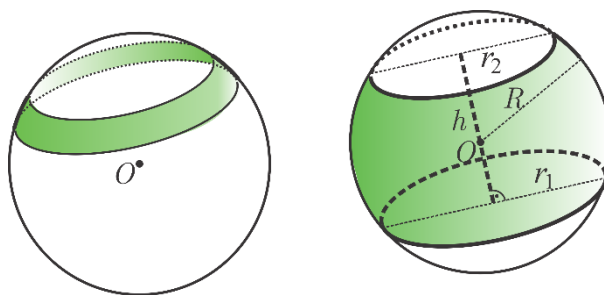


Цртеж 55

Делот од сферата што го отсекуваат две паралелни рамнини се нарекува **појас** (или **зона**) (цртеж 56). Во него спаѓаат и кружниците кои се пресек на рамнините и сферата.

Растојанието меѓу рамнините се нарекува **висина на појасот**.

Радиусите на пресеците на сферата со рамнините се нарекуваат **радиуси на појасот**.



Цртеж 56

**Плоштината на сфера** со радиус  $R$  е еднаква на  $P = 4R^2\pi$ .

**Пример 1.** Плоштината на сфера со радиус  $R = 7 \text{ dm}$  е еднаква на  $P = 4 \cdot 7^2 \pi = 196\pi \text{ dm}^2$ . ♦

**Пример 2.** Плоштината на калота отсечена од сфера со радиус  $R$  и висина  $h$  на калотата е еднаква на

$$P = 2\pi Rh. \blacklozenge$$

**Пример 3.** Плоштината на калота со висина  $h = 4\text{ cm}$  отсечена од сфера со радиус  $R = 7\text{ cm}$  е еднаква на  $P = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = 56\pi\text{ cm}^2$ .  $\blacklozenge$

**Плоштината на појас** со висина  $h$  отсечен од сфера со радиус  $R$  е еднаква на  $P = 2\pi Rh$ .

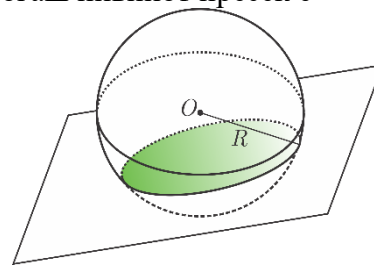
**Пример 4.** Плоштината на појас со висина  $h = 4\text{ cm}$  отсечена од сфера со радиус  $R = 7\text{ cm}$  е еднаква на  $P = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = 56\pi\text{ cm}^2$ .  $\blacklozenge$

**Дефиниција.** Множеството од сите точки во просторот чие растојание до дадена точка  $O$  не е поголемо од даден позитивен реален број  $R$  се нарекува **топка** со центар во  $O$  и радиус  $R$ .

Обично топката со центар во  $O$  и радиус  $R$  ќе ја означуваме со  $T(O, R)$ .

Ако рамнина и точка се сечат во повеќе од една точка, тогаш нивниот пресек е круг (цртеж 57). Пресеците кои се еднакво оддалечени од центарот на топката имаат еднакви радиуси.

Нека рамнината  $\Sigma$  ја сече топката  $T(O, R)$  во повеќе од една точка и  $\Sigma$  не минува низ  $O$ . Деловите од топката што ги отсекува рамнината се нарекуваат **топкини отсечоци** (цртеж 58).



Цртеж 57

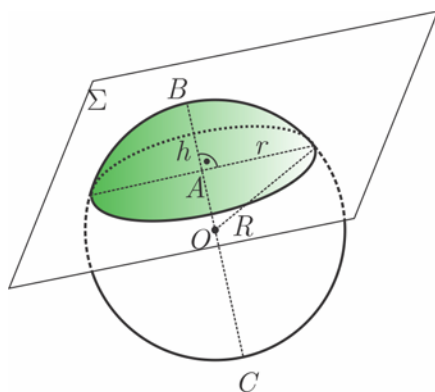
Во топкиниот отсечок припаѓа кругот  $\Sigma \cap T(O, R)$  и тој е ограничен со соодветната калота.

Ако рамнината минува низ центарот  $O$  добиените делови се нарекуваат **полутопки**.

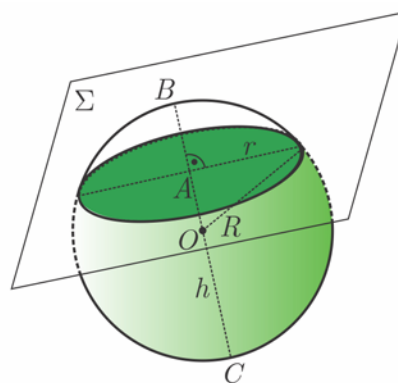
Нека  $p$  е нормалата на  $\Sigma$  што минува низ  $O$  и нека  $\{A\} = p \cap \Sigma$  и  $\{B, C\} = p \cap T(O, R)$ . Растојанието  $h = \overline{AB}$  (т. е.  $h = \overline{AC}$ ) се нарекува **висина на топкиниот отсечок**. Радиусот  $r$  на кружницата  $\Sigma \cap S(O, R)$  се нарекува **радиус на топкиниот отсечок**.

Висината и радиусот на топкиниот отсечок се еднакви со висината и радиусот на соодветната калота.

**Плоштината на топкиниот отсечок** е еднаква на збирот од плоштината на калотата и плоштината на кругот со кој е ограничен отсечокот, т.е.  $P = 2R\pi h + r^2\pi$ .



„помал“ топкин отсечок  
со висина  $h = \overline{AB}$



„поголем“ топкин отсечок  
со висина  $h = \overline{AC}$

Цртеж 58

Делот од топката што го отсекуваат две паралелни рамнини се нарекува **топкин слој**. Во него спаѓаат и круговите кои се пресек на рамнините и топката и е ограничен со соодветниот појас. Растојанието меѓу рамнините се нарекува **висина на топкиниот слој** и ја означуваме со  $H$ .

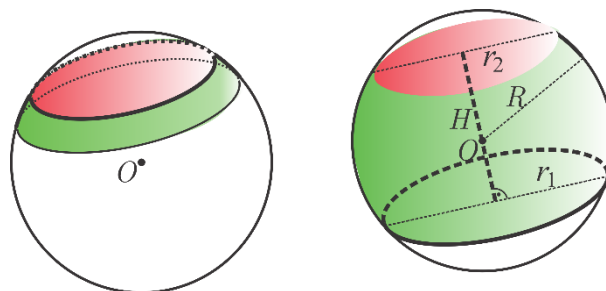
Радиусите на пресеците на топката со рамнините се нарекуваат **радиуси на топкиниот слој**. Висината и радиусите на топкиниот слој се еднакви со висината и соодветните радиуси на соодветниот појас (цртеж 59).

**Плоштината на топкиниот слој** е еднаква на збирот од плоштините на соодветниот појас и плоштините на граничните кругови

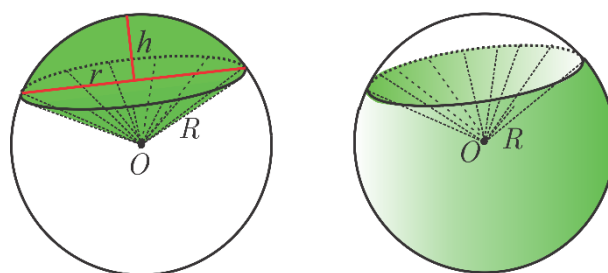
$$P = r_1^2 \pi + r_2^2 \pi + 2R\pi H$$

Делот од топката ограничен со калота со висина  $h$  и бочната површина на конусот со центар во центарот на топката и основа граничниот круг на соодветниот топкин отсечок со радиус  $r$  се нарекува **топкин исечок** (цртеж 60).

Плоштината на топкиниот исечок е еднаква на збирот од плоштината на бочната површина на конусот и плоштината на калотата  $P = 2R\pi h + \pi Rr$ .



Цртеж 59



„помал“ исечок

„поголем“ исечок

Цртеж 60

**Волуменот на топка** со радиус  $R$  е еднаков на  $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ .

**Пример 5.** Волуменот на топка со радиус  $R = 8\text{ dm}$  изнесува  $V = \frac{4}{3}8^3\pi = \frac{2048\pi}{3}\text{ dm}^3$ . ♦

Волуменот на топкин отсечок со висина  $h$  исечен од топка со радиус  $R$  е еднаков на

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h).$$

**Пример 6.** Волуменот на топкиниот отсечок со висина  $h = 3\text{ dm}$  исечен од топка со

радиус  $R = 8\text{ dm}$  изнесува  $V = \frac{3^2\pi}{3}(3 \cdot 8 - 3) = 63\pi\text{ dm}^3$ . ♦

Волуменот на топкин исечок со висина на калотата  $h$  исечен од топка со радиус  $R$  е еднаков на  $V = \frac{2}{3}R^2h\pi$ .

**Пример 7.** Волуменот на топкиниот исечок со висина на калотата  $h = 3\text{ dm}$  исечен од

топка со радиус  $R = 8\text{ dm}$  изнесува  $V = \frac{2}{3}8^2 \cdot 3\pi = 128\pi\text{ dm}^3$ . ♦

Волуменот на топкин слој со висина  $h$ , радиуси на граничните кругови  $r_1$  и  $r_2$ , отсечен

од топка со радиус  $R$ , е еднаков на  $V = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ .

**Пример 8.** Волуменот на топкиниот слој со висина  $h = 3\text{ dm}$  отсечен од топка со

радиус  $R = 8\text{ dm}$  кој има радиуси на граничните кругови  $r_1 = 2\text{ dm}$  и  $r_2 = 3\text{ dm}$  изнесува

$$V = \frac{4\pi}{6} (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^3 + 3^2) = 32\pi \text{ dm}^3. \blacklozenge$$

### Задачи

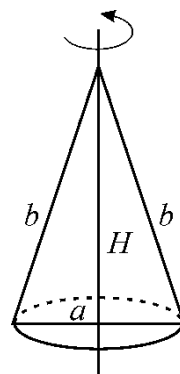
- Одреди го радиусот на топката ако плоштината на еден голем круг е  $324\pi \text{ cm}^2$ .
- Топка со радиус  $65 \text{ cm}$  пресечена е со две рамнини кои се наоѓаат од иста страна на центарот на топката и се на растојание од  $16 \text{ cm}$  и  $25 \text{ cm}$  од центарот. Одреди ги плоштината и волуменот на слојот.
- Одреди ги плоштината на сферата и волуменот на топката која е пресечена со две паралелни рамнини кои се на различна страна од центарот и се на растојание од  $10 \text{ cm}$ . Плоштината на пресеците е  $25\pi \text{ cm}^2$  и  $16\pi \text{ cm}^2$ .

## 8.13. Ротациони тела

**Дефиниција.** Ротациони тела се викаат геометриските тела кои се добиваат со ротација на некоја геометриска фигура околу права.

Ќе разгледаме неколку карактеристични ротациони тела.

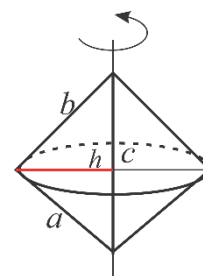
**Пример 1.** Нека е даден рамнокрак триаголник со основа  $a$  и крак  $b$ . Со ротација околу права која минува низ висината на триаголникот, спуштена кон основата, се добива конус со радиус  $r = \frac{a}{2}$  и генератриса  $s = b$  (цртеж 61). Тогаш за плоштината на основата имаме  $B = r^2 \pi = \frac{a^2}{4} \pi$ , обвивката има плоштина  $M = r \pi s = \frac{a \pi b}{2}$ , а висината на телото е  $H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ . Според тоа плоштината на добиениот конус



Цртеж 61

се пресметува со формулата  $P = \frac{a(a+2b)\pi}{4}$ , а волуменот  $V = \frac{a^2 \pi \sqrt{4b^2 - a^2}}{24}$ .  $\blacklozenge$

**Пример 2.** Нека е даден разностран остроаголен триаголник со страни  $a, b$  и  $c$ . Со ротација околу оска која минува низ една негова страна (цртеж 62), се добива ротационо тело кое е всушност комбинација од два конуси со радиус на основата која е еднаков на висината повлечена кон таа страна и генератриса останатите две страни. Плоштината на тоа тело е збир од плоштините на обвивките на тие два конуси т.е.  $P = h\pi(a+b)$ , каде  $h$  е должина на висината спуштена кон страната  $c$ , а  $a$  и  $b$  се страните на триаголникот. За



Цртеж 62



волуменот на телото имаме  $V = \frac{h^2 \pi c}{3}$ , каде  $c$  е должината на страната која е оска на ротација за телото. ♦

**Пример 3.** Нека е даден разностран тапоаголен триаголник со страни  $a, b$  и  $c$  и нека страните  $a$  и  $b$  го образуваат тапиот агол. Избираме оската на ротација да минува низ  $a$  (цртеж 63). Тогаш се добива ротационо тело кое личи на „вдлабнат“ конус, односно од конус со радиус  $h_a$  и генератриса  $c$  е изваден конус со ист радиус и генератриса  $b$ . Тогаш телото има плоштина

$$P = h_a \pi (b + c) \text{ и волумен } V = \frac{h_a^2 \pi a}{3}. \blacklozenge$$

**Задача 1.** Правоаголен триаголник со катети  $a = 5 \text{ cm}$  и  $b = 12 \text{ cm}$  ротира прво околу катета  $a$ , а потоа околу катета  $b$ . Кое од двете добиени тела има поголем волумен?

**Решение.** Со ротација околу катетата  $a = 5 \text{ cm}$  се добива конус со радиус  $r = b = 12 \text{ cm}$  и висина  $H = a = 5 \text{ cm}$ , па

волуменот на тоа тело е  $V_1 = \frac{12^2 \pi \cdot 5}{3} = 240\pi \text{ cm}^3$  (цртеж 64). Со

ротација околу катетата  $b = 12 \text{ cm}$ , се добива конус со радиус  $r = a = 5 \text{ cm}$  и висина  $H = b = 12 \text{ cm}$ , па волуменот на тоа тело

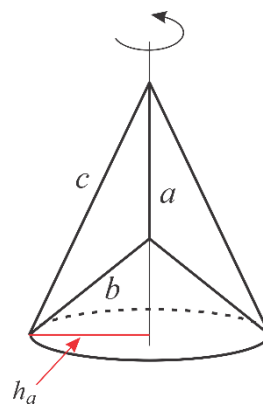
е  $V_2 = \frac{5^2 \pi \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$ . Значи  $V_1 > V_2$ . ♦

**Пример 4.** Нека е даден правоаголник со страни  $a$  и  $b$ . Со ротација околу една од страните на правоаголникот се добива цилиндар со висина еднаква на страната која е оска на ротација и радиус еднаков со другата страна на правоаголникот (цртеж 65). Ако, на пример, оска на ротација е страната  $a$ , тогаш плоштината на цилиндарот е  $P = 2b\pi(a + b)$ , а волуменот изнесува  $V = b^2 \pi a$ . ♦

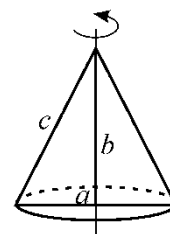
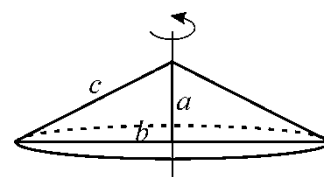
**Пример 5.** Нека е даден рамнокрак трапез со основи  $a$  и  $b$  и крак  $c$ . Ако оската на ротација минува низ средините на основите на трапезот, тогаш добиеното тело е потсечен конус со радиуси на основите еднакви на половините од основите на трапезот, висина еднаква на висината на трапезот и генератриса еднаква со кракот (цртеж 66). Според тоа за плоштината на тој конус имаме

$$P = \frac{\pi}{4} (a^2 + 2c(a + b) + b^2),$$

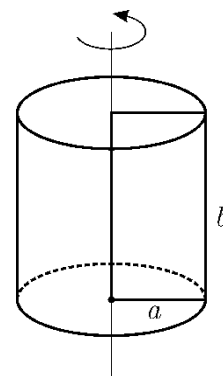
а за волуменот  $V = \frac{\pi h}{12} (a^2 + ab + b^2)$ . ♦



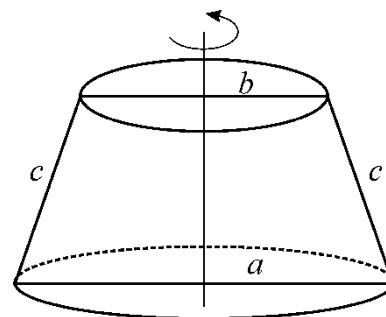
Цртеж 63



Цртеж 64



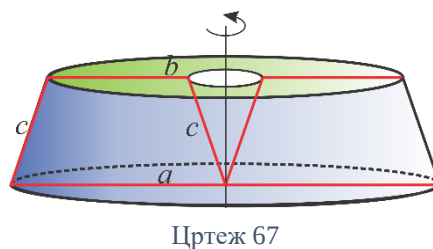
Цртеж 65



Цртеж 66

**Пример 6.** Нека е даден рамнокрак трапез со основи  $a$  и  $b$  и крак  $c$  и  $a > b$ . Ако оската на ротација е права која минува низ едно теме на  $a$  и е нормална на неа, тогаш се добива „вдлабнат“ потсечен конус кој има радиуси  $a$  и  $\frac{a+b}{2}$ , висина  $h$  која е еднаква со висината на трапезот и генератриса  $c$ , а од него е изваден конус со висина  $h$  и генератриса  $c$  (цртеж 67). Според тоа добиеното ротационо тело има плоштина  $P = \frac{\pi}{2}(2a^2 + 2ab + c(3a+b))$  и волумен

$$V = \frac{\pi ha(a+b)}{2}. \blacklozenge$$

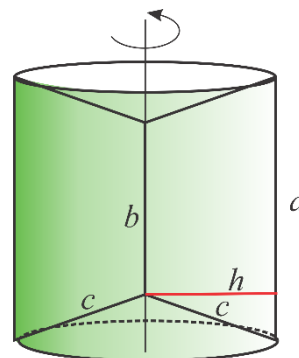


Цртеж 67

**Задача 2.** Рамнокрак трапез со основи  $a = 20$  cm,  $b = 12$  cm и крак  $c = 5$  cm, ротира околу помалата основа. Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

**Решение.** Прво ќе ја одредиме висината на трапезот

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 3 \text{ cm}.$$



Цртеж 68

Ротационото тело е „двојно вдлабнат“ цилиндар со радиус  $R = h$  и висина  $H = a = 20$  cm, а од него се извадени два конуси со радиуси  $r = h$ , висина

$h_1 = \frac{a-b}{2} = 4$  cm и генератриса  $s = c = 5$  cm (цртеж 68). Според тоа, плоштината на

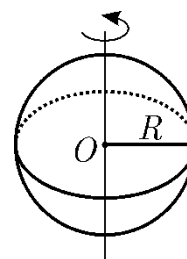
телото изнесува  $P = 2R\pi H + 2 \cdot r\pi s = 2\pi(RH + rs) = 150\pi \text{ cm}^2$ , а волуменот

$$V = R^2\pi H - 2 \cdot \frac{r^2\pi h_1}{3} = 156\pi \text{ cm}^3. \blacklozenge$$

**Задача 3.** Круг со радиус  $R = 10$  cm ротира околу права која минува низ неговиот центар. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

**Решение.** Ротационото тело кое се добива е топка со радиус  $R = 10$  cm (цртеж 69), па плоштината е  $P = 4R^2\pi = 400\pi \text{ cm}^2$ ,

а волуменот  $V = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3. \blacklozenge$



Цртеж 69

### Задачи

**1.** Рамностран триаголник со страна  $\sqrt{3}$  cm ротира околу оска која минува низ висината на триаголникот. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

2. Квадрат со плоштина од  $18 \text{ cm}^2$  ротира околу една дијагонала. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело.
3. Правоаголник  $ABCD$  со страни  $\overline{AB} = 13 \text{ cm}$  и  $\overline{BC} = 27 \text{ cm}$ , ротира околу оска која е паралелна со  $BC$  и е на растојание од  $5 \text{ cm}$  од неа. Пресметај плоштина на добиеното ротационо тело.
4. Рамнокрак трапез со крак  $c = 13 \text{ cm}$  и основи  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  ротира околу основата  $a$ . Пресметај плоштина и волумен на добиеното ротационо тело.

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Основата на права призма е рамнокрак триаголник со основа  $8 \text{ cm}$  и крак  $5 \text{ cm}$ . Одреди ја бочната плоштина, ако висината на призмата е еднаква со висината на триаголникот кој е основа, повлечена од врвот на рамнокракиот триаголник.
2. Основата на тристрана пирамида е правоаголен триаголник со помала катета  $\sqrt{3} \text{ cm}$  и остар агол од  $30^\circ$ . Одреди го волуменот на пирамидата ако нејзината висина е еднаква со хипотенузата на основата.
3. Плоштината на еден цилиндар е  $1596\pi \text{ cm}^2$ . Одреди ја висината на цилиндарот ако неговиот дијаметар изнесува  $12 \text{ cm}$ .
4. Одреди ја плоштината на конус со плоштина на основата  $144 \text{ cm}^2$  и генератриса  $\frac{23}{\sqrt{\pi}}$ .
5. Одреди го дијаметарот на топка, ако нејзината плоштина е  $289\pi \text{ cm}^2$ .
6. Во прав паралелопипед страните на основата се  $2 \text{ cm}$  и  $8 \text{ cm}$  и тие образуваат агол од  $30^\circ$ . Бочната плоштина изнесува  $10 \text{ cm}^2$ . Одреди го волуменот на паралелопипедот.
7. Основи на потсечена пирамида се два рамнокраки правоаголни триаголници со хипотенузи  $7 \text{ cm}$  и  $5 \text{ cm}$ , соодветно. Одреди го волуменот на потсечената пирамида ако нејзината висина е  $12 \text{ cm}$ .
8. Висината на еден цилиндар е еднаква со дијаметарот. Бочната плоштина изнесува  $104\text{cm}^2$ . Одреди ја плоштината на основата на цилиндарот.
9. Плоштината на оскин пресек на конус е  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Одреди го волуменот на конусот ако неговата висина изнесува  $2\pi \text{ cm}$ .
10. Плоштината на пресекот на сфера со рамнина изнесува  $15 \text{ cm}^2$ . Рамнината се наоѓа на растојание  $\sqrt{\frac{30}{\pi}} \text{ cm}$  од центарот на сферата. Одреди ја плоштината на сферата.
11. Основата на права призма е ромб, а дијагоналните пресеци имаат плоштина  $3 \text{ cm}^2$  и  $4 \text{ cm}^2$ . Одреди ја бочната плоштина на призмата.

**12.** Плоштината на основите на правила четиристрана потсечена пирамида се  $1 \text{ cm}^2$  и  $4 \text{ cm}^2$ . Одреди го волуменот на целата пирамида ако потсечената пирамида има волумен  $21 \text{ cm}^3$ .

**13.** Бочната површина на цилиндар изнесува  $80 \text{ cm}^2$ . Оскиниот пресек е квадрат. Одреди ја плоштината на цилиндарот.

**14.** Бочната површина на конус со генератриса  $s = \frac{22}{\sqrt{30\pi}}$  е една четвртина од плоштината на круг со радиус  $\sqrt{\frac{176}{\pi}} \text{ cm}$ . Одреди ја плоштината на основата на конусот.

**15.** Радиусот на кругот кој се добива кога рамнина ќе пресече топка е два пати помал од радиусот на топката. Одреди го волуменот на топката ако пресекот има плоштина  $\frac{9}{4}\sqrt{\pi} \text{ cm}^2$

## ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

### Модуларна единица 1

#### 1.1.

1. а) 11, б) 0,2, в)  $\frac{3}{4}$ , г)  $\frac{1}{2}$ . 2. б) и в). 3. в) и г). 4. а)  $x \in \mathbb{R}$ , б)  $x \in [-5, \infty)$ , в)  $x \in \mathbb{R}$ ,

г)  $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$ . 5. а) 2, б)  $\frac{1}{5}$ , в)  $-\frac{1}{2}$ , г)  $16 - 2x$

#### 1.2.

1. а)  $\sqrt[15]{3^{12}}$ , б)  $\sqrt[9]{a^6 b^3}$ , в)  $\sqrt[12]{(-2x)^6 y^9}$ . 2. а)  $\sqrt{2}$ , б)  $\sqrt[4]{a^5 b^2}$ , в)  $4^5 x^{60} y^4$ . 3. а)  $\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{3^4}$  и  $\sqrt[12]{4^3}$ ,

б)  $\sqrt[12]{\frac{a^4 b^2}{3^2}}, \sqrt[12]{\frac{a^3 b^6}{4^3}}$  и  $\sqrt[12]{(2ab)^4}$ . 4. а)  $3a^2, \sqrt[3]{2a^3 b}$  и  $\sqrt{5b^3}$ , б)  $\sqrt[3]{3a^2 b^4}, \sqrt[4]{9a^3 b^6}$  и  $\sqrt{a^5 b}$ . 5. а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,

б)  $\sqrt{|a|}$ , в)  $\sqrt[3]{\frac{2a+1}{0,2a^2 b}}$ .

#### 1.3.

1. а) 160, б)  $10a$ , в)  $\frac{1}{210}$ , г)  $\frac{2a^3}{b^4 c^2}$ . 2. а)  $\sqrt{a^{10} b^7 c^4}$ , б)  $6a$ , в)  $\sqrt[5]{2ab^2}$ , г)  $\sqrt[4]{\frac{16a}{b^2}}$ . 3. а) 240, б)  $\frac{3}{\sqrt[4]{|x|}}$ , в)  $-\frac{2xy^3}{z^4}$ , г)  $\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x} \cdot (x^2+1)}$ , за  $x > 0$ . 4. а)  $\sqrt[12]{432x^{14}y^3}$ , б)  $\sqrt[3]{\frac{8x^3}{y}}$ . 5. а)  $x+1 \geq 0$  т.е.

$x \in [-1, \infty)$ , б)  $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ , в)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , г)  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ .

#### 1.4.

1. а)  $5\sqrt{2}$ , б)  $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3}$ , в)  $\frac{x}{y^2}\sqrt[4]{2xy^2}$ , г)  $\frac{2a}{3b^3}\sqrt[5]{6a^3b^2}$ . 2. а)  $\sqrt[3]{\frac{20}{7}}$ ,

б)  $\sqrt{108ab^3}$ , в)  $\sqrt{a(a^2-1)}$ , г)  $\sqrt[4]{\frac{x^6 a^2}{3}}$ .

3. а)  $\frac{1}{xy}\sqrt{xy-y^2}$ , б)  $\frac{y}{2}\sqrt{2xbc}$ , в)  $\frac{\sqrt[3]{a^2-ab}}{a-b}$ , г)  $\frac{2}{a}\sqrt[5]{a^2}$ . 4. а), в) и г).

#### 1.5.

1. а)  $6a^4$ , б)  $a^{12}\sqrt{ab^{11}c^6}$ , в)  $(-2)^4\sqrt{(a-b)}$ , г)  $\sqrt[8]{2^7}$ . 2. а)  $6a^4$ , б)  $a^{12}\sqrt{ab^{11}c^6}$ , в)  $-2^4\sqrt{a-b}$ , г)  $\sqrt[6]{ab^4c^2}$

. 3. а)  $9\sqrt{2}$ , б)  $3\sqrt{a} - 4\sqrt{a^2-1}$ , в)  $\sqrt{a}$ . 4. а)  $\frac{2}{5}$ , б) 0, в)  $\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ , г)  $\sqrt{x}$ . 5. а)  $\frac{5}{2}$ , б) -8.

#### 1.6.

1. а)  $\frac{\sqrt[3]{18}}{6}$ , б)  $5 + \sqrt{2}$ , в)  $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x-y}$ , г)  $\sqrt[5]{a^2}$ , д)  $\frac{9-\sqrt{77}}{2}$ , е)  $5(3+2\sqrt{2})$ ,

е)  $(a+2b)(\sqrt{a}-\sqrt{2b})$ , ж)  $\frac{(a^2-b^2)\sqrt{a-\sqrt{ab}} \cdot (a+\sqrt{ab})}{a^2-ab}$ , за  $a, b > 0$ .

## 1.7.

1. а)  $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ , б)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ , в)  $\sqrt{(x+1)^3}$ , г)  $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-y)^3}}$ , д)  $\sqrt[3]{(a+b)^2}$ . 2. а)  $a^{\frac{1}{3}}$ , б)  $a^{\frac{2}{n-1}}$ , в)  $a^{\frac{3}{2}}$ , г)  $x^{\frac{2}{m}}$ ,

д)  $(a-b)^{\frac{n}{4}}$ . 3. а)  $x^{\frac{1}{6}}$ , б)  $x-y$ , в)  $8\frac{1}{3}$ . 4. а)  $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ , б)  $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}$ , в)  $x-2\sqrt{xy}+y$ ,

г)  $a^2+3a^{\frac{4}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}+1$ . 5. а)  $\frac{1}{x+2\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}$ , б)  $\frac{8a^8\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{8a^8\sqrt{a}\sqrt{b}}{b^2}$ .

## 1.8.

1. а)  $x \in [-2, 3) \cup (3, \infty)$ , б)  $x \in (-2, \infty)$ , в)  $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ , г)  $x \in [0, 1) \cup (1, \infty)$ . 2. а) 4, б) -115.

3. а) 14, б) 28.

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) 16, б) 2, в) 0,3, г)  $3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{5}$ . 2. в) и г). 3. а)  $x \in \mathbb{R}$ , б)  $x \in (-\infty, 3]$ , в)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,

г)  $x \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$ . 4. а) 6, б) 5, в)  $-\frac{1}{27}$ , г)  $-2x$ . 5. а)  $\sqrt[15]{3^{10}}$ , б)  $\sqrt[25]{a^{20}b^5}$ ,

в)  $\sqrt[20]{(-3x)^{30}y^{10}}$ . 6. а)  $\sqrt[8]{2}$ , б)  $\frac{1}{3^5}$ , в)  $\sqrt{(6x^{12})^5y^6}$ .

7. а)  $\sqrt[12]{5^6}, \sqrt[12]{7^4}$  и  $\sqrt[12]{2^3}$ , б)  $\sqrt[12]{\frac{a^8b^{16}}{5^4}}, \sqrt[12]{\frac{a^9b^6}{4^3}}$  и  $\sqrt[12]{\frac{2^2a^4b^2}{5^2}}$ .

8. а)  $\sqrt{9a^3}, \sqrt[3]{8a^9b^3}$  и  $\sqrt[6]{5a^5}$ , б)  $3a^2b^4, \sqrt{9a^3b^6}$  и  $\sqrt[3]{5a^5b}$ .

9. Пресметај:

а)  $-4x$ , б)  $\frac{3}{170}$ , в)  $\frac{2a^3}{b^4c^2}$ , г)  $a^6b^4c^7$ , д)  $60a^4$ , е)  $\sqrt[12]{32x^{15}y^2}$ , ж)  $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}(x^2+3)}$ .

10. а)  $x \in \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$ , б)  $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ , в)  $x \neq -\frac{3}{2}$ , г)  $x \neq -\frac{5}{2}$ . 11. а)  $3\sqrt{10}$ , б)  $\frac{3}{10}\sqrt[3]{2}$ ,

в)  $\frac{x^2}{y^2}\sqrt[4]{8x}$ , г)  $\frac{3a}{b^2}\sqrt[5]{\frac{a^4}{64b^2}}$ . 12. а)  $\sqrt[3]{425}$ , б)  $\sqrt{(a+3)(a+1)}$ , в)  $\sqrt[4]{\frac{4x^6a^2}{3}}$ . 13. а)  $\frac{1}{5ab}\sqrt[3]{180a^2b^2c}$ ,

б)  $\frac{1}{3x}\sqrt[4]{18x^3a^2y}$ . 14. а)  $9+2\sqrt{14}$ , б)  $a^2(1-2\sqrt{a}+a)$ , в)  $\sqrt[80]{a^{75}} = \sqrt[16]{a^{15}}$ , г)  $8a^7 \cdot \sqrt[7]{a^4}$ ,

д)  $-3a\sqrt[6]{a-b}$ , е)  $\frac{\sqrt[5]{a^4b^4}}{ab}$ .

15. а)  $\frac{3}{4}$ , б)  $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$ , в)  $a^2 \cdot \sqrt[24]{a^{13}}$ . 16. а)  $\sqrt[4]{72}$ , б)  $\frac{13-2\sqrt{30}}{7}$ , в)  $\sqrt{xy}$ , г)  $\frac{-\sqrt{a^2+1}}{a^2}$ , д)  $\frac{1}{x}$ .

17. а)  $\frac{3ab^3}{2}$ , б)  $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$ , в)  $\frac{1}{2}$ . 18. а)  $x \in [0, 3) \cup (3, \infty)$ , б)  $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ .

19. а)  $12+5\sqrt{3}$ , б)  $\frac{2}{1-a^2}$ .

## Модуларна единица 2

## 2.1.

1. а)  $\frac{\pi}{12} \approx 0,26 \text{ rad}$ , б)  $\frac{\pi}{4} \approx 0,79 \text{ rad}$ , в)  $\frac{17\pi}{45} \approx 1,19 \text{ rad}$ , г)  $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09 \text{ rad}$ ,

д)  $2,36 \text{ rad}$ , е)  $0,36 \text{ rad}$ , ж)  $0,91 \text{ rad}$ .

2. а)  $10^\circ$ , б)  $15^\circ$ , в)  $45^\circ$ , г)  $255^\circ$ , д)  $171^\circ 53' 14''$ , е)  $132^\circ 21' 12''$ , ж)  $156^\circ 36' 23''$ .

3. а)  $\frac{\pi}{4} \approx 0,79 \text{ rad}$ , б)  $\frac{3\pi}{5} \approx 1,88 \text{ rad}$ , в)  $\frac{4\pi}{5} \approx 2,51 \text{ rad}$ .

## 2.2.

1. а)  $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\cos \beta = \frac{5}{13}$ ,  $\tan \beta = \frac{12}{5}$ ,  $\cot \beta = \frac{5}{12}$ ,

б)  $\sin \beta \approx 0,87$ ,  $\cos \beta \approx 0,49$ ,  $\tan \beta \approx 1,73$ ,  $\cot \beta \approx 0,58$ .

2. а)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ .

б)  $\sin \alpha \approx 0,78$ ,  $\cos \alpha \approx 0,66$ ,  $\tan \alpha \approx 1,24$ ,  $\cot \alpha \approx 0,8$ .

## 2.3.

1. а)  $0,54$ , б)  $0,98$ , в)  $0,84$ , г)  $0,54$ . 2. а)  $60^\circ$ , б)  $70^\circ$ . 3. а)  $15^\circ$ , б)  $40^\circ$ .

4. а)  $3$ , б)  $\frac{1}{2}$ , в)  $2$ . 5. а)  $2\sin \alpha$ , б)  $0$ , в)  $2\sin^2 \alpha$ . 6. а)  $1$ , б)  $1$ , в)  $0$ , г)  $1$ .

## 2.4.

1. а)  $1$ , б)  $1$ , в)  $1$ , г)  $1$ . 2. а)  $\frac{\sqrt{6}}{8}$ , б)  $1$ . 3. а)  $3$ , б)  $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ , в)  $1$ .

4. а)  $45^\circ$ , б)  $30^\circ$ , в)  $45^\circ$ , г)  $60^\circ$ , д)  $30^\circ$ .

## 2.5.

1. а)  $\sin 35^\circ < \sin 67^\circ$ , б)  $\cos 40^\circ < \cos 23^\circ$ , в)  $\tan 36^\circ < \tan 58^\circ$ , г)  $\cot 73^\circ < \cot 39^\circ$ .

2. а)  $\sin 45^\circ 17' 20'' < \sin 45^\circ 39' 34''$ , б)  $\cos 40^\circ 55' < \cos 40^\circ 12' 12''$ ,

в)  $\tan 56^\circ 23' 55'' > \tan 56^\circ 12' 56''$ , г)  $\cot 39^\circ 55' 77'' < \cot 39^\circ 33' 6''$ .

## 2.6.

1. а)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ ,  $\cot \alpha = \frac{12}{5}$ , б)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,  $\tan \alpha = \sqrt{15}$ ,  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ ,

в)  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ ,  $\cot \alpha = \frac{5}{4}$ , г)  $\sin \alpha \approx 0,92$ ,  $\cos \alpha \approx 0,39$ ,  $\tan \alpha \approx 2,44$ ,

2. а)  $\sin^2 \alpha$ , б)  $-\cos^2 \alpha$ , в)  $1$ . 7. а)  $\frac{1-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$ , б)  $\frac{\cot^2 \alpha - 1}{1+\cot^2 \alpha}$ , в)  $\frac{\tan \alpha + \tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$ .

8.  $\frac{55}{54}$ . 9.  $6\sqrt{2}$ .

## 2.7.

1.  $\beta = 53,8^\circ$ ,  $a = 40,1 \text{ cm}$ ,  $b = 54,9 \text{ cm}$ . 2.  $\beta = 74,2^\circ$ ,  $a = 11,7 \text{ cm}$ ,  $b = 3,3 \text{ cm}$ .

3.  $\alpha = 24,6^\circ$ ,  $b = 5,14 \text{ cm}$ ,  $c = 5,65 \text{ cm}$ . 4.  $\beta = 8^\circ$ ,  $a = 1750,4 \text{ cm}$ ,  $c = 1767,6 \text{ cm}$ .

5.  $\alpha = 41^\circ 30'$ ,  $a = 66,1$  cm,  $c = 99,7$  cm. 6.  $\beta = 66^\circ$ ,  $b = 11,79$  cm,  $c = 5,25$  cm.  
 7.  $\alpha = 45^\circ 57' 5''$ ,  $\beta = 42^\circ 2' 55''$ ,  $b = 224,48$  cm.  
 8.  $\alpha = 61^\circ 55' 39''$ ,  $\beta = 28^\circ 4' 21''$ ,  $c = 59,5$  cm.  
 9.  $\alpha = 84^\circ 43' 30''$ ,  $\beta = 5^\circ 16' 30''$ ,  $a = 42,3$  cm. 10.  $\beta = 59^\circ 10'$ ,  $a = 31,9$  cm,  $c = 62,2$  cm.

## 2.8.

1.  $45^\circ 14' 23''$ . 2.  $36^\circ 52' 12''$ . 3.  $\alpha \approx 4,57^\circ$ . 4. Од местото  $B$  авионот е на растојание 4182,78 m, а растојанието меѓу  $A$  и  $B$  е 1223 m.

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а)  $34^\circ 24' 36''$ , б)  $18^\circ 16' 12''$ , в)  $23^\circ 40' 12''$ . 2. а)  $36,43^\circ$ , б)  $45,19^\circ$ , в)  $73,87^\circ$ .  
 3. а)  $0,44\text{rad}$ , б)  $1,49\text{rad}$ . 4. а)  $105^\circ$ , б)  $72^\circ 45' 56''$ . 5. а) 0, б) 2, в)  $\frac{1}{\cos \alpha}$ ,  $\alpha \neq 0$ .  
 6. а)  $65^\circ$ , б)  $47^\circ 10'$ , в)  $30^\circ$ , г)  $40^\circ$ .  
 7. а)  $\sin 72^\circ > \sin 27^\circ$ , б)  $\cos 31^\circ 20' < \cos 30^\circ 40'$ , в)  $\tan 49^\circ > \tan 29^\circ$ ,  
 г)  $\cotg 49^\circ 30' > \cotg 49^\circ 55'$ .  
 8. а)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cotg \alpha = \frac{3}{4}$ , б)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cotg \alpha = \frac{3}{4}$ ,  
 в)  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ ,  $\cotg \alpha = \frac{5}{3}$ , г)  $\sin \alpha = \frac{25}{\sqrt{674}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{674}}$ ,  $\tan \alpha = \frac{25}{7}$ .  
 9. а) 7, б) -1. 10. а)  $\beta = 53^\circ 58'$ ,  $a \approx 40$ ,  $b \approx 55$ , б)  $\alpha = 25^\circ 40'$ ,  $b \approx 936,43$ ,  $c \approx 1038,94$ , в)  
 $\alpha = 4^\circ 50'$ ,  $a \approx 0,05$ ,  $c \approx 0,622$ , г)  $\alpha = 45^\circ 57' 5''$ ,  $\beta = 44^\circ 2' 55''$ ,  $b \approx 222,48$ ,  
 д)  $\alpha = 84^\circ 44' 6''$ ,  $\beta = 5^\circ 15' 54''$ ,  $a \approx 42,32$ .  
 11.  $b = a \pm 2c \cdot \cos \alpha$ ,  $h = c \sin \alpha$ . 12. 2410 m.

## Модуларна единица 3

## 3.1.

1. а)  $\operatorname{Re}(z) = 4$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 2$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = -3$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 4$ , в)  $\operatorname{Re}(z) = -4$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$ ,  
 г)  $\operatorname{Re}(z) = 1 + \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 1$ , д)  $\operatorname{Re}(z) = -3$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , е)  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -3$ ,  
 е)  $\operatorname{Re}(z) = m$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 3$ , ж)  $\operatorname{Re}(z) = 4$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -(n-1)$ .  
 2. а)  $z = 3 + \frac{1}{2}i$ , б)  $z = -\frac{1}{4} + (2 - \sqrt{2})i$ , в)  $z = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$ , г)  $z = m + 1 + (n - \sqrt{2})i$ .  
 3. а)  $x = 5$ ,  $y = -8$ , б)  $x = 5$ ,  $y = 8$ , в)  $x = 2$ ,  $y = 1$ , г)  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{3}{2}$ .  
 4. а)  $\bar{z} = 7 - 5i$ , б)  $\bar{z} = -\frac{1}{4} + 6i$ , в)  $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$ , г)  $\bar{z} = 4 - i$ , д)  $\bar{z} = \frac{1}{3}i$ , е)  $\bar{z} = 5$ ,  
 е)  $\bar{z} = i$ , ж)  $\bar{z} = 0$ .

## 3.2.

1. а)  $z_1 + z_2 = 7 + 9i$ , б)  $z_1 + z_2 = -40 - 30i$ , в)  $z_1 + z_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}i$ , г)  $z_1 + z_2 = -2\sqrt{7} - 27\sqrt{2}i$ .  
 2. Да.



3. а)  $z_1 - z_2 = 9 - 30i$ , б)  $z_1 - z_2 = 74 - 27i$ , в)  $z_1 - z_2 = -\frac{29}{12} + i$ , г)  $z_1 - z_2 = \sqrt{7} - 5\sqrt{6}i$ .  
 4. а)  $\operatorname{Re}(z) = 9$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 2$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = -5$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -5$ , в)  $\operatorname{Re}(z) = -27$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 2$ ,  
 г)  $\operatorname{Re}(z) = -19$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -39$ .  
 5.  $\overline{z_1} = 2 + i$ ,  $\overline{z_2} = -1 - 2i$ ,  $\overline{z_1 + z_2} = 1 - i$ ,  $\overline{z_1 + z_2} = 1 - i$ ,  $\overline{z_1 - z_2} = 3 + 3i$ , и  $\overline{z_1 - z_2} = 3 + 3i$ .

## 3.3.

1. а)  $z_1 z_2 = -54 + 48i$ , б)  $z_1 z_2 = 110 + 11i$ , в)  $z_1 z_2 = -4 + 7i$ , г)  $z_1 z_2 = 69 + 5\sqrt{3}i$ .  
 2.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$ . 3. а)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3}i$ , б)  $\frac{z_1}{z_2} = 2 + \frac{1}{2}i$ , в)  $\frac{z_1}{z_2} = 1 + 6i$ , г)  $\frac{z_1}{z_2} = -8 + i$ .  
 4. а) Точно, б) Точно.  
 5. а)  $\operatorname{Re}(z) = -2$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -1$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = -1$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 1$ , в)  $\operatorname{Re}(z) = 2$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -3\sqrt{5}$ .

## 3.4.

2. а)  $|z| = 2\sqrt{5}$ , б)  $|z| = \sqrt{2}$ , в)  $|z| = \sqrt{5}$ , г)  $|z| = 2\sqrt{5}$ , д)  $|z| = 1$ , е)  $|z| = 2$ .  
 3.  $|z| = \sqrt{5}$ ,  $|\overline{z}| = \sqrt{5}$ ,  $|-z| = \sqrt{5}$ , добиените вредности се еднакви.  
 4.  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = -\sqrt{3} - i$ . 5.  $z_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{5}i$ ,  $z_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}i$ .

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а)  $\operatorname{Re}(z) = -1$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -1$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , в)  $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$ ,  
 г)  $\operatorname{Re}(z) = m - 1 + \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 1$ , д)  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) = m - n$ ,  
 е)  $\operatorname{Re}(z) = 1 - \sqrt{3} + n$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .  
 2. а)  $x = -3$ ,  $y = 4$ , б)  $x = -4$ ,  $y = -1$ , в)  $x = -\frac{4}{3}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ , г)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = 1$ .  
 3. а)  $\overline{z} = 7 + 5i$ , б)  $\overline{z} = \frac{1}{4}i$ , в)  $\overline{z} = 1 + \sqrt{3}i$ , г)  $\overline{z} = a + \sqrt{2} - bi$ , д)  $\overline{z} = a - b - 3ai$ ,  
 е)  $\overline{z} = 1 + a + \sqrt{2} - (b + \sqrt{3})i$ .  
 4. а)  $z_1 + z_2 = 12 + 2i$ ,  $z_1 - z_2 = 2 - 4i$ , б)  $z_1 + z_2 = \frac{7}{12} - \frac{5}{6}i$ ,  $z_1 - z_2 = -\frac{1}{12} - \frac{13}{6}i$ ,  
 в)  $z_1 + z_2 = -\sqrt{17} - 18\sqrt{2}i$ ,  $z_1 - z_2 = 3\sqrt{17} + 12\sqrt{2}i$ ,  
 г)  $z_1 + z_2 = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}i$ ,  $z_1 - z_2 = 2m + 2ni$ .  
 5. а)  $-z = 13 - \frac{1}{3}i$ , б)  $-z = \frac{1}{2} - (\sqrt{2} - 3)i$ , в)  $-z = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ , г)  $-z = 1 - m - (n + \sqrt{2})i$ .  
 6. а)  $\operatorname{Re}(z) = 5$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 4$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = 6$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 5$ , в)  $\operatorname{Re}(z) = -14$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -2$ ,  
 г)  $\operatorname{Re}(z) = -13$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -3$ .  
 7. а)  $z_1 z_2 = 62 - 61i$ , и  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{82}{85} - \frac{29}{85}i$ , б)  $z_1 z_2 = 24 + 48i$ , и  $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}i$ ,  
 в)  $z_1 z_2 = -\frac{59}{120} + \frac{2}{3}i$ , и  $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{273}{2410} + \frac{12}{241}i$ , г)  $z_1 z_2 = 4\sqrt{6} + 2i$ , и  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}i$ .  
 8. а)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -\frac{7}{5}$ , б)  $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$ .

$$\text{в)} \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}{5}.$$

$$9. \text{ а)} \frac{1}{z} = \frac{1}{82} + \frac{9}{82}i, \text{ б)} \frac{1}{z} = -\frac{1}{101} - \frac{10}{101}i, \text{ в)} \frac{1}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \text{ г)} \frac{1}{z} = \frac{3}{31} - \frac{2\sqrt{3}}{93}i.$$

$$11. \text{ а)} \frac{\sqrt{37}}{2} \text{ б)} |z| = \frac{\sqrt{97 - 64\sqrt{2}}}{4}, \text{ в)} |z| = \frac{1}{3} + \sqrt{3}, \text{ г)} |z| = \sqrt{(m+1)^2 + (n - \sqrt{2})^2}.$$

#### Модуларна единица 4

##### 4.1.

1. а) Не, б) Да, в) Не. 2. а) Не, б) Да, в) не. 3. а)  $3x^2 - 3x + 2 = 0$ , б)  $4x^2 - 16 = 0$ , в)  $x^2 - 3x - 6 = 0$ ,  $x \neq 4$ .

$$4. \text{ а)} x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = 0, \text{ б)} x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0, \text{ в)} x^2 + \frac{2}{3}x = 0.$$

5. а) Не, б) Да, в) Да.

##### 4.2.

1. а)  $x = 0$ , б)  $y = 0$ , в) За  $k \neq 0$  решение е  $x = 0$ , за  $k = 0$  решение е секој реален број  $x$ .

2. а)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 7$ , б)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -2$ , в)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 6$ , г)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -10$ ,

д)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{1}{3}$ , е)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 9$ .

$$3. \text{ а)} x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 3, \text{ б)} x_1 = -\sqrt{2} \text{ и } x_2 = \sqrt{2}, \text{ в)} x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ и } x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\text{г)} x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 5, \text{ д)} y_1 = -\frac{4}{5} \text{ и } y_2 = \frac{4}{5}, \text{ е)} z_1 = -\frac{3}{4} \text{ и } z_2 = \frac{3}{4}.$$

$$4. \text{ а)} x_{1,2} = \pm i, \text{ б)} x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}i, \text{ в)} x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{14}}i, \text{ г)} y_{1/2} = \pm 2i, \text{ д)} x_{1,2} = \pm \sqrt{6}i, \text{ е)} x_{1,2} = \pm \sqrt{3}i.$$

$$5. \text{ а)} x = \frac{1}{3}, \text{ б)} x_1 = 0, x_2 = -2, x_{3,4} = -1 \pm i, \text{ в)} x_1 = 0, x_2 = 4, x_{3,4} = 2 \pm 2i.$$

$$6. \text{ а)} a, b \neq 0, \text{ ако } b > 0 \text{ решенија се } x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{b}}{a}i, \text{ ако } b < 0 \text{ решенија се } x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-b}}{a},$$

$$\text{б)} a, b \neq 0, \text{ решенија се } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a^2}.$$

##### 4.3.

$$1. \text{ а)} x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5, \text{ б)} x_1 = -9 \text{ и } x_2 = 10, \text{ в)} x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 4,$$

$$\text{г)} x_1 = -3 - \sqrt{5} \text{ и } x_2 = -3 + \sqrt{5}, \text{ д)} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{е)} x_1 = -3 - \sqrt{3} \text{ и } x_2 = -3 + \sqrt{3}.$$

$$2. \text{ а)} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \text{ б)} x_{1,2} = 4 \pm 4\sqrt{5}i, \text{ в)} x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{7}i}{2}, \text{ г)} 2, \text{ д)} 1, \text{ е)} 5.$$

$$3. \text{ а)} x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2i}{5}, \text{ б)} x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{2}, \text{ в)} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$4. \text{ а)} x_1 = -7 \text{ и } x_2 = 1, \text{ б)} x_1 = -9 \text{ и } x_2 = 7, \text{ в)} x_1 = 5 - \sqrt{31} \text{ и } x_2 = 5 + \sqrt{31},$$

$$\text{г)} x_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } x_2 = -\frac{1}{3}, \text{ д)} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{3}.$$

5. а)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{3}{5}$ , б)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{7}{3}$ , в)  $x_1 = -\frac{3}{2}i$  и  $x_2 = \frac{3}{2}i$ , г)  $x_1 = -7$  и  $x_2 = 7$ , д)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$ , е)  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 1$ .

6. а)  $x_1 = -\frac{m}{2}$  и  $x_2 = -\frac{m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , б)  $x_1 = \frac{a}{b}$  и  $x_2 = \frac{b}{a}$ ,  $a, b \neq 0$ .

## 4.4.

1. а)  $D = 24$ , б)  $D = 0$ , в)  $D = -4$ , г)  $D = -8$ , д)  $D = 25$ , е)  $D = 16$ .

2. а) Има, б) Има, в) Нема, г) Има, д) Има, е) нема.

3. а) Нема, б) Има, в) Има, г) Има, д) Има, е) Има.

4. а) Има, б) Има, в) Нема, г) Има, д) Има, е) Има.

5. 3а  $k = -3$  двоен корен е  $x = \frac{1}{2}$ , а за  $k = 2$  двоен корен е  $x = -2$ . 6. а)  $k \leq 2$ , б)  $k > 2$ . 7.  $m > -3$ .

## 4.5.

1. а)  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $x_1 x_2 = 2$ , б)  $x_1 + x_2 = -2$ ,  $x_1 x_2 = -1$ , в)  $x_1 + x_2 = 37$ ,  $x_1 x_2 = 27$ ,

г)  $x_1 + x_2 = 0$ ,  $x_1 x_2 = -15$ , д)  $x_1 + x_2 = 7$ ,  $x_1 x_2 = 3$ , е)  $x_1 + x_2 = \frac{a^2 + 9}{a}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{9}{a}$ ,  $a \neq 0$ .

3. а)  $x_2 = -9$ , б)  $x_2 = -31$ , в)  $x_2 = -\frac{13}{2}$ , г)  $x_2 = -\frac{7}{2}$ .

## 4.6.

1. а) Да, б) Не, в) Да, г) Да.

2. а)  $x^2 + 2x - 35 = 0$ , б)  $x^2 + 8x + 15 = 0$ , в)  $2x^2 + 5x - 12 = 0$ , г)  $10x^2 + 19x + 6 = 0$ ,

д)  $x^2 + 3\sqrt{3}x - 30 = 0$ , е)  $x^2 - 6x + 4 = 0$ .

3. а)  $x_1 = 4$  и  $x_2 = 5$ , б)  $x_1 = 2$  и  $x_2 = \frac{5}{6}$ , в)  $x_1 = -12$  и  $x_2 = 1$ , г)  $x_1 = -5$  и  $x_2 = 3$ ,

д)  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2p$ , е)  $x_1 = -3a$  и  $x_2 = 1$ .

4. а)  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 5$ , б)  $x_1 = -2 - \sqrt{3}$  и  $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ , в)  $x_1 = -\frac{1}{4}$  и  $x_2 = \frac{5}{4}$ ,

г)  $x_1 = -11$  и  $x_2 = -1$ .

5. а)  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ , б)  $3x^2 - 9x - 12 = 3(x+1)(x-4)$ ,

в)  $2x^2 - 72 = 2(x-6)(x+6)$ . 6.  $m = \frac{5}{2}$ . 7.  $3x^2 - 2x - 1 = 0$ . 8.  $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

## 4.7.

1. Броевите се 12 и 13. 2. Броевите се 10, 11, 12, 13 и 14.

3. Периметарот на правоаголникот 32 cm. 4. Потребни се 85 m жица.

5. Учествуваа 10 шахисти. 6. Цената е намалена за 10%.

7. Каматната стапка за шест месеци изнесува 8%.

8. а) Телото ќе биде на бараната висина во втората, односно во шестата секунда.

б) Телото ќе падне на земја за 8 s.

## 4.8.

1. а)  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{4}, 2\right\}$ , б)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ . 2. а)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , б)  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ .

3. а) За ниту една вредност на  $x$ , б)  $x = -27$ , в)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . 4.  $x = 1$ .

5. а)  $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ , б)  $\emptyset$ , в)  $\{\frac{1}{2}, 2\}$ , г)  $\{1\}$ , д)  $\emptyset$ , е)  $\{0, \frac{1}{3}\}$ .

6. а)  $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$ , б)  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$ , в)  $x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$ , г)  $x_1 = -8$  и  $x_2 = 1$ .

7. За  $a \neq 0$  решение е  $x = 0$ , а за  $a \neq 1$  решение е  $x = \frac{a^2 + 2b + a}{1 - a}$ .

### ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) Линеарна равенка со една непозната, б) Равенка од четврти степен со една непозната, в) Квадратна равенка со две непознати.

2. а)  $x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{4} = 0$ , б)  $x^2 + 2x + 5 = 0$ , в)  $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ . 3. а)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 2$ ,

б)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -1$ , в)  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{b}{a-1}$ , за  $a \neq 1$ .

4. а)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}i$ , б)  $x_{1,2} = \pm \frac{5}{2}$ , в)  $x_{1,2} = \pm(a-b)$ .

5. а)  $x_1 = 6$  и  $x_2 = -7$ , б)  $x_1 = -13$  и  $x_2 = 11$ , в) двоен корен  $x = 9$ , г)  $x_1 = -5$ , и  $x_2 = 7$ ,  
д)  $x_1 = -10a$  и  $x_2 = 2a$ .

6. а) за секое  $a \in \mathbb{R}$ , б) Равенката нема конјугирано комплексни корени за ниту една вредност на параметарот  $a$ .

7. а)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{2}$ , б)  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{16}$ , в)  $x_1^3 + x_2^3 = \frac{99}{64}$ .

8. а)  $\frac{2(x+5/2)}{x+3}$ , б)  $-\frac{(x+2)}{(x+5)}$ , в)  $\frac{7(a-2/7)}{3(a-1/3)}$ .

9. а)  $p \neq 1$ , б)  $p = 1$ , в)  $p = \frac{9}{8}$ , г)  $p < \frac{9}{8}$ .

10. Марија има 12 години, а Ана има 8 години. 11. Ширината на патот изнесува 1 m.

12. а)  $x = -3$ , б)  $x_1 = -6$ .

### Модуларна единица 5

#### 5.1.

1. Биквадратни се равенките под: а), б), г) и д).

2. а)  $x_{1,2} = \pm 5$ ,  $x_{3,4} = \pm \frac{1}{3}$ , б)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ ,  $x_{3,4} = \pm \frac{2}{3}$ , в)  $t_{1,2} = \pm 2$ ,  $t_{3,4} = \pm 3$ , г)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$ ,

д)  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , е)  $x = 0$ .

3. а)  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , б)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ , в)  $t_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ ,  $t_{3,4} = \pm 2$ , г) нема реални решенија,

д)  $x_{1,2} = \pm \frac{3}{8}$ ,  $x_3 = 0$ , е)  $x_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$ .

4. а) 4, б) 0, в) 4, г) 0, д) 2, е) 2.

5. а)  $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 0$ , б)  $4(y + \frac{5}{2})(y+1)(y-1)(y - \frac{5}{2}) = 0$ .

6. а)  $\frac{x^2+4}{x^2-9}$ ,  $x \neq \pm 2$ , б)  $\frac{x^2-3}{x^2-9}$ ,  $x \neq \pm 2\sqrt{2}$ .

## 5.2.

1. а)  $x_1 = 4, x_{2,3} = -2 \pm 2i\sqrt{3}$ , б)  $x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm 3i$ , в)  $x_1 = -2, x_2 = 3, x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3}, x_{5,6} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$ ,

г)  $x_1 - 1, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = -4$ , д)  $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$ , ё)  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}$ .

## 5.3.

1. Ирационални се равенките под б) и г).

2. а) Не, б) Да, в) Да, г) Да.

3. а)  $\{1\}$ , б)  $\{3\}$ , в)  $\{-2, 2\}$ , г)  $\left\{\frac{7-\sqrt{65}}{2}, \frac{7+\sqrt{65}}{2}\right\}$ , д)  $\left\{-9, \frac{9}{2}\right\}$ , ё)  $\emptyset$ .

4. а)  $x = 13$ , б)  $x = 77$ , в)  $x_{1,2} = \pm 1$ .

5. а)  $x = 5$ , б)  $x = 3$ , в)  $x = \frac{2}{3}$ , г)  $x = 3$ . 6. За  $a < 2$  има две решенија  $x_1 = a$  и  $x_2 = 2$ , а за  $a \geq 2$  едно решение  $x = a$ .

## 5.4

1. а)  $x_1 = 0, x_2 = 8$ , б)  $x_1 = -1, x_2 = 2$ , в)  $x = 3$ , г)  $x = 9$ .

2. а)  $x = 1$ , б)  $x = -\frac{5}{3}$ , в)  $x = -2$ , г)  $x = -1$ .

## 5.5.

1. Системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати се: а), б) и д).

2. а)  $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ , б)  $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ , в)  $\begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ x^2 + 2z^2 - x + 3z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ ,

г)  $\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$ , д)  $\begin{cases} -x + y - 10 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + \frac{37}{2} = 0 \end{cases}$ , ё)  $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y = 0 \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}$ .

3. а)  $m = 3, n = -1, p = 1, a = 3, b = 1, c = 1, d = 1, e = -1$  и  $f = -1$ .

б)  $m = -1, n = \frac{1}{3}, p = 12, a = 1, b = \sqrt{2}, c = -3, d = 0, e = 0$  и  $f = -4$ .

4. а) Да, б) Не, в) Не.

5. а) Е решение, б) Не е решение, в) Е решение, г) Не е решение.

## 5.6.

1. а)  $\{(3, 5), (5, 3)\}$ , б)  $\{(-3, -9), (3, 9)\}$ , в)  $\left\{\left(\frac{-3 + \sqrt{105}}{4}, \frac{3 + \sqrt{105}}{6}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{105}}{4}, \frac{3 - \sqrt{105}}{6}\right)\right\}$

г)  $\{(2, 1), (-14, 17)\}$ , д)  $\left\{\left(\frac{76 + 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 + 6\sqrt{166}}{13}\right), \left(\frac{76 - 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 - 6\sqrt{166}}{13}\right)\right\}$ .

2. Реални решенија имаат системите: а), г) и ё), а комплексни решенија имаат системите б), в) и д).

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а)  $x_{1,2} = \pm 1$ ,  $x_{3,4} = \pm 3$ , б)  $x_{1,2} = \pm 2$ ,  $x_{3,4} = \pm i$ .  
 2. а)  $x_{1,2} = \pm 2$ ,  $x_{3,4} = \pm 3$ , б)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ ,  $x_{3,4} = \pm 2$ . 3. а)  $\{\pm 1, \pm 4\}$ , б)  $\emptyset$ .  
 4. а)  $y^2 - 4$ , б)  $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 1}$ . 5. а)  $x = 3$ , б)  $x = 1$ . 6. а)  $x = 3$ , б)  $x_{1,2} = \pm 1$ .  
 8. а)  $(1, 1)$  и  $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{13}{7}\right)$ , б)  $\left(-\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 - \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$  и  $\left(\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 + \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$ .  
 9. а)  $\left(-2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$  и  $\left(-2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$ ,  
 б)  $\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}\right)$  и  $\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}\right)$ .

## Модуларна единица 6

## 6.1.

1. а)  $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$ , б)  $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ , в)  $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ,  
 г)  $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ , д)  $f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ , ѓ)  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ .  
 2. а) 3, б) 17, в) 10.  
 3. а)  $-\frac{1}{4}$  и 1, б) 1 и 5, в) нема нули, г) -2 и 4, д)  $\frac{-3 - \sqrt{6}}{2}$  и  $\frac{-3 + \sqrt{6}}{2}$ , ѓ) нема нули.

## 6.2.

1. а) За  $x = -\frac{3}{4}$  има минимум  $\frac{31}{8}$ , б) За  $x = \frac{3}{2}$  има максимум  $\frac{25}{4}$ ,  
 в) За  $x = \frac{5}{2}$  има минимум  $-\frac{1}{4}$ , г) За  $x = 1$  има максимум 9,  
 д) За  $x = -\frac{3}{2}$  има минимум -2, ѓ) За  $x = 0$  има минимум  $\frac{2}{3}$ .  
 2. а)  $T\left(\frac{3}{8}, \frac{25}{16}\right)$ , б)  $T(3, -2)$ , в)  $T\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ , г)  $T\left(3, -\frac{3}{4}\right)$ , д)  $T\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$ , ѓ)  $T(0, 5)$ .  
 3. а) расте на  $\left(-\infty, \frac{3}{8}\right)$ , опаѓа на  $\left(\frac{3}{8}, +\infty\right)$ ,  
 б) опаѓа на  $(-\infty, 3)$ , расте на  $(3, +\infty)$ , в) опаѓа на  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ , расте на  $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ ,  
 г) опаѓа на  $(-\infty, 3)$ , расте на  $(3, +\infty)$ , д) расте на  $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ , опаѓа на  $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ ,  
 ѓ) расте на  $(-\infty, 0)$ , опаѓа на  $(0, +\infty)$ .  
 4. Постои, тоа е функцијата  $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$ .

## 6.4.

1. а) позитивна за секој реален број  $x$ ,

**б)** позитивна за  $x \in (-1, 4)$ , негативна за  $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ ,

**в)** позитивна за секој реален број  $x$ , освен за  $x = \frac{2}{3}$ .

**2. а)**  $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$ , **б)** негативна за секој реален број  $x$ ,

**в)**  $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .

**3. а)** позитивен, **б)** позитивен за  $x \in (2, 4)$ , негативен за  $x \in (4, 5)$ , **в)** позитивен за  $x \in (7, 9)$ , негативен за  $x \in (6, 7)$ , **г)** позитивен.

### 6.5.

**1. а)** една непозната, **б)** една непозната, **в)** две непознати, **г)** три непознати.

**2. а)** равенка од прв степен, **б)** равенка од втор степен, **в)** равенка од петти степен, **г)** равенка од четврти степен.

**3. а)**  $3x^2 - 3x + 2 > 0$ , **б)**  $4x^2 - 16 > 0$ , **в)**  $x^2 - 8x + 5 < 0$ , **г)**  $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 < 0$ .

**4. а)** е решение, **б)** е решение, **в)** не е решение,

**г)** не е решение, не е во дефиниционото множество на неравенката.

**5. а)**  $x = \frac{2}{3}$ , **б)**  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{7}\right\}$ , **в)**  $\emptyset$ , **г)**  $x \in \mathbb{R}$ , **д)**  $x \in [-2, 7]$ , **е)**  $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (9, +\infty)$ .

### 6.6.

**1. а)**  $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ , **б)**  $x \in \left(-1, \frac{4}{3}\right)$ , **в)**  $x \in \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ .

**2. а)**  $x \in (-2, 2)$ , **б)**  $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ , **в)**  $\emptyset$ , **г)**  $x \in \mathbb{R}$ , **д)**  $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ , **е)**  $x \in (-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$ .

**3. а)**  $x \in (1, 7)$ , **б)**  $\mathbb{R}$ , **в)**  $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , **г)**  $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$ , **д)**  $\emptyset$ ,

**е)**  $x \in \left(-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$ .

**4. а)**  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ , **б)**  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (4, +\infty)$ , **в)**  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , **г)**  $x \in (0, 13]$ ,

**д)**  $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ , **е)**  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ .

### 6.7.

**1. Да.** **2. а)**  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , **б)**  $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ , **в)**  $\emptyset$ .

**3. а)**  $x \in (-8, -5]$ , **б)**  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ , **в)**  $x \in [-2, 1]$ .

**4. а)**  $x \in (1, 2)$ , **б)**  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ , **в)**  $x \in [1, 14]$ .

**5. а)**  $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$ , **б)**  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ , **в)**  $x \in [-3, 2]$ .

## 6.8.

1. а)  $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$  б)  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{7}\right\}$ , в)  $\emptyset$ , г)  $\left\{\frac{3}{5}\right\}$ .
2. а)  $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, +\infty)$ , б)  $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ , в)  $x \in (1, 3)$ , г)  $x \in [-7, 1] \cup [2, 3]$ .
3. а)  $x \in (-3\sqrt{3}, 0] \cup \left[\frac{8}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ , б)  $x \in (-\infty, -13) \cup (-2, 4) \cup (11, +\infty)$ , в)  $x \in (-9, -1) \cup (5, 10)$ .
4. а)  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 4\right) \cup (4, +\infty)$ , б)  $x \in [-3, 2] \cup (4, 7)$ , в)  $\emptyset$ .
5. Броевите се 3 и 4.

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) 0 и -1, б) нема нули, в) -1. 2.  $T\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$ .
3. а) позитивна за  $x \in \left(-\infty, \frac{37 - \sqrt{1345}}{12}\right) \cup \left(\frac{37 + \sqrt{1345}}{12}, +\infty\right)$ ,  
негативна за  $\left(\frac{37 - \sqrt{1345}}{12}, \frac{37 + \sqrt{1345}}{12}\right)$ ,
- б) позитивна за  $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , негативна за  $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ ,  
в) негативна за секој реален број  $x$ .
4.  $m = -2$  и  $m = 3$ , за  $m = -2$  темето е  $T\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ , за  $m = 3$  темето е  $T(-2, -7)$ .
6. а)  $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ , б)  $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$ , в)  $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$ , г)  $\mathbb{R}$ ,  
д)  $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ , е)  $x \in \left(-\frac{7}{3}, -1\right)$ .
7. а)  $x \in \left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{8}\right)$ , б)  $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{311}}{2}, \frac{1 + \sqrt{311}}{2}\right)$ , в)  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .
8. а)  $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ , б)  $x \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ , в)  $\emptyset$ .
9. а)  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$ , б)  $x \in [-3, 1] \cup (3, 7)$ , в)  $x \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, 7)$ .
10. Броевите се 7 и 9.

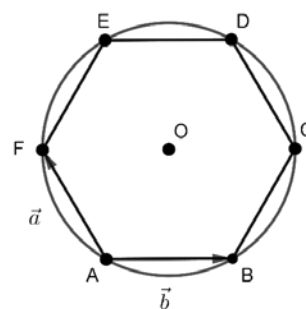


## Модуларна единица 7

### 7.1.

1. в), г), д); 2. а), в), г); 3) а) Колинеарни се  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ , а колинерани се и  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$

б) Истонасочени се  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$  в)  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ , г)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

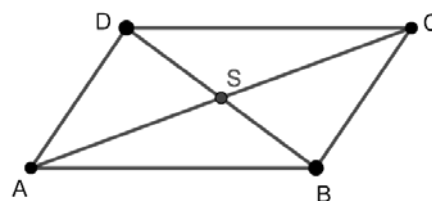


Цртеж 1

### 7.2.

1.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  
 $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$ .  
 2.  $\overrightarrow{DA} = -\vec{b} + \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = -2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BE} = -2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{a} + \vec{b}$  и  $\overrightarrow{ED} = \vec{a} + \vec{b}$ .  
 3.  $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$ ,  
 $\overrightarrow{FB} = -\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  
 $\overrightarrow{FE} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OA} = -\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CE} = \vec{a} - \vec{b}$  и  $\overrightarrow{CF} = -2\vec{b}$  (цртеж 1).

4. а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$ , б)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$ ,  
 в)  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$  (цртеж 2).



Цртеж 2

### 7.3.

1. Од равенствата:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  и

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ , следува

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}),$$

т.е.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$ . 2. Нека  $AA_1$  и  $BB_1$

се две различни тежишни линии на  $\triangle ABC$  (цртеж 3).

Тогаш  $T$  ја дели отсечката  $BB_1$  во однос  $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TB_1} = 2 : 1$ .

Ако  $T_1$  е средина на  $BT$ , тогаш имаме

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OT_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OB}}{2}\right), \text{ па следува}$$

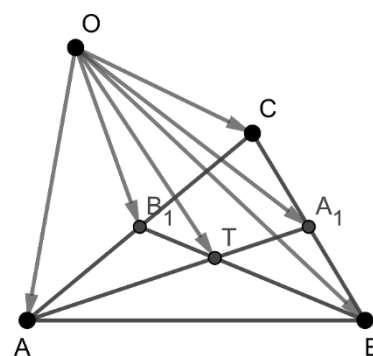
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1}. \text{ Бидејќи } B_1 \text{ е средина на } AC \text{ имаме}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}). \text{ Конечно}$$

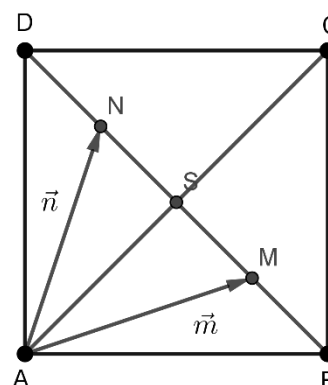
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

3.  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{m} + \vec{n}$ ,  $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN} = 2(-\vec{m} + \vec{n})$  и

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} = \vec{m} + \frac{1}{2}(-\vec{n} + \vec{m}) = \frac{1}{2}(3\vec{m} - \vec{n}) \text{ (цртеж 4).}$$



Цртеж 3



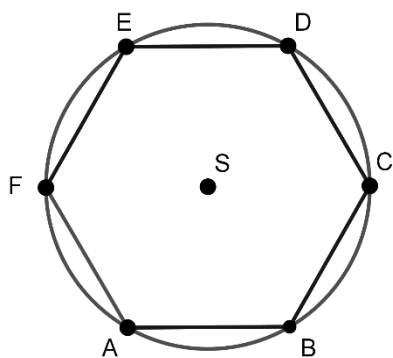
Цртеж 4

4. а)  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS}$ , б)  $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ,

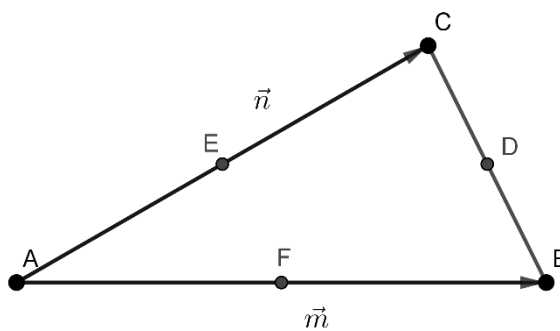
в)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$  и

г)  $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{DE}$  (цртеж 5).

5.  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{n})$ ,  $\overrightarrow{BE} = -\vec{m} + \frac{\vec{n}}{2}$  и  $\overrightarrow{CF} = -\vec{n} + \frac{\vec{m}}{2}$  (цртеж 6).



Цртеж 5



Цртеж 6

#### 7.4.

1. Бидејќи множеството точки во просторот  $\mathcal{P}$  е бесконечно следува дека постои точка  $B \neq A$ , од **A<sub>5</sub>** следува дека постои единствена права која минува низ точките  $A$  и  $B$ . Од **A<sub>4</sub>** следува дека постои точка  $C$  која не лежи на правата  $AB$ . Значи  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни точки.

2. Од задача 1, следува дека постојат точки  $B$  и  $C$  такви што  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни точки. Значи правата  $BC = a$  не минува низ точката  $A$ .

3. Од **A<sub>6</sub>** следува дека постојат точки  $B, C$  и  $D$  такви што  $A, B, C$  и  $D$  не се компланарни. Според тоа рамнините  $ABC, ABD$  и  $BCD$  минуваат низ точката  $A$ .

#### 7.5.

1. Правата  $b$  ја сече правата  $a$  или правите се разминувачки. 2. а) Точно е, бидејќи прободот е заедничка точка, б) Точно е, бидејќи пресечната точка е единствена ( $b$  не лежи во  $\Sigma$ ), в) Да, бидејќи правите се сечат, г) Од дефиницијата за паралелност на права и рамнина следува дека и ова тврдење е точно. 3. а) Точката  $B$ , бидејќи во спротивно  $B \equiv A$ , б) Точката  $A$ , бидејќи во спротивно  $A \equiv B$ .

#### 7.6.

1. Не, бидејќи ако две рамнини се сечат во две точки, тогаш тие се сечат во бесконечно многу точки т.е. нивниот пресек е права. 2. а) Да, права кој аги прободува двете рамнини а е разминувачка со пресечната права, б) да, сите точки просторот кои не се на дадените рамнини а такви во просторот има бесконечно многу. 3. а) Не е точно, бидејќи правите може да се сечат и да се паралелни со рамнината, б) Не е точно, бидејќи рамнините може да се сечат во права која е паралелна со дадената

#### 7.7.

1. Една (ако сите три прави се компланарни) или три (ако трите прави не се компланарни) рамнини. 2. Една (ако точките и правата се компланарни) или две (ако правата и двете точки не се компланарни) рамнини. 3. Не секогаш, бидејќи ако правата  $c$  минува низ пресечната точка на правите  $a$  и  $b$ , тогаш таа не мора да лежи во рамнината  $\Sigma$ .

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1.  $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$  и  $\overrightarrow{BE} = 2\vec{b} - 4\vec{a}$  (цртеж 7).

2.  $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP} =$   
 $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP}$ .

3. Нека  $O$  е произволна точка, тогаш  
 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} =$   
 $= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} =$   
 $= 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PM}$ .

4.  $\vec{x} = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{LM}) + \overrightarrow{EL} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FK}$ .

5. Нека  $O$  е произволна точка, тогаш  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$  (цртеж 8).

Бидејќи  $Q$  е средина на  $LN$ , а  $P$  е средина на  $KM$  се добива:

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON})$  и  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM})$ . Од тоа што  $K, L, M$  и  $N$  се средини на страните  $BC, CD, DE$  и  $EA$ , соодветно, имаме:

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ,  $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ ,  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$  и

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA})$ . Значи

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA})\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Од овде следува дека отсечките  $PQ$  и  $AB$  се паралелни

и односот на нивните должини е  $\frac{1}{4}$ .

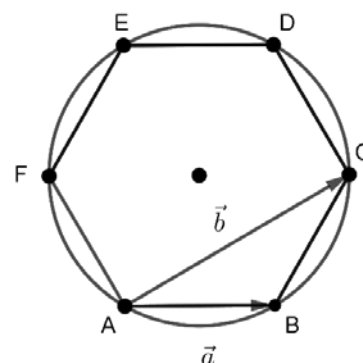
6. Нека  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) е трапез и  $M, N$  се средини на основите  $AB$  и  $CD$ , соодветно, а  $O$  е пресечната точка на дијагоналите  $AC$  и  $BD$  на трапезот (Цртеж 9). Триаголниците  $AOB$  и  $DOC$  се слични, па

$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OD}} = k$ , од каде следува дека  $\overrightarrow{OA} = -k\overrightarrow{OC}$  и

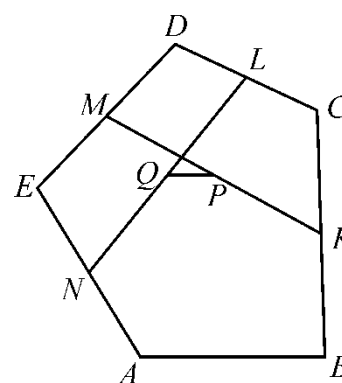
$\overrightarrow{OB} = -k\overrightarrow{OD}$ . Тогаш

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(-k)(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = -k\overrightarrow{ON}$ . Значи

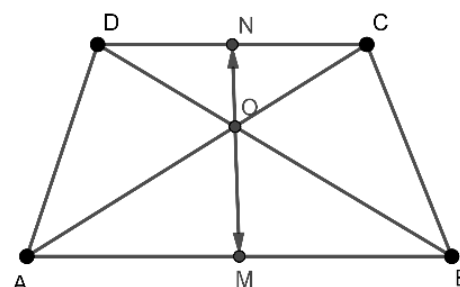
точките  $M, N$  и  $O$  лежат на иста права.



Цртеж 7



Цртеж 8

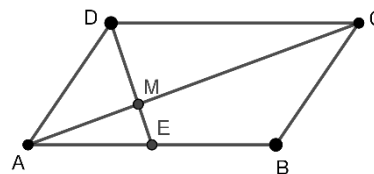


Цртеж 9

7. Точките  $A, M$  и  $C$  се колинеарни, па  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ , а точките  $D, M$  и  $E$  се колинерани, па  $\overrightarrow{DM} = m\overrightarrow{DE}$ .

Од тоа што  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD}$ , се добива дека  $k = \frac{1}{3}$  и

$m = \frac{2}{3}$  од каде следува бараниот однос (цртеж 10).



Цртеж 10

8. Да може, ако и само ако точката  $C$  лежи на кружница со центар во точката  $A$  и радиус  $\overline{AB}$ . **а) Не.** Бидејќи  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ , следува дека мора  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  да се колинеарни вектори, со иста насока и иста почетна точка. Сподред тоа топките  $B$  и  $C$  се совпаѓаат, што не е можно. **9.** Нека  $A$  е произволна точка. Тогаш постојат точки  $B$  и  $C$  такви што  $A, B$  и  $C$  не се колинеарни. Правите  $AB, BC$  и  $AC$  не минуваат низ иста точка. **10.** Нека дадените точки ги означиме со  $A, B, C, D$  и  $E$ . Ако сите пет точки се колинеарни, тогаш тие определуваат единствена права. Ако четири од нив се колинеарни, на пример точките  $A, B, C$  и  $D$ , тогаш тие образуваат права  $AB$ , а со точката  $E$  може да образуваме четири прави ( $AE, BE, CE$  и  $DE$ ). Ако, пак, три од нив се колинеарни, на пример  $A, B$  и  $C$ , а другите две точки не се колинеарни со ниту една од нив, тогаш може да се образуваат 8 прави ( $AB, AD, AE, BD, BE, CD, CE$  и  $DE$ ). Ако, на пример, колинеарни се точките  $A, B, C$  и  $A, D, E$ , тогаш може да формираме 6 прави ( $AB, AD, BE, BD, CD$  и  $CE$ ). Останува случајот кога ниту една тројка точки не се колинеарни, тоа значи дека прави може да образуваат сите парови точки. Такви се 10 прави. **11.** Ако  $A, B, C$  и  $D$  се компланарни, тогаш тие определуваат единствена рамнина. Ако три од нив се компланарни, на пример  $A, B$  и  $C$ , тогаш тие ја определуваат рамнината  $ABC$ , а од тоа што  $D$  не е компланарна со нив рамнини се и  $ABD, BCD$  и  $ACD$ . **12. а)** Не е точно, бидејќи точките мора да се неколинеарни, **б)** Не е точно, бидејќи правите во општ случај може да се разминувачки, **в)** Не е точно, бидејќи може точката да лежи на правата.

### Модуларна единица 8

#### 8.1.

1. Најмалиот број на сидови на една призма е 5, два основни и три бочни, 6 темиња и 9 рабови.  
2. **а)** не, **б)** да, петстрана (петаголна) призма, **в)** не. Бројот на рабови кај призма е делив со 3.

#### 8.2.

1.  $130 \text{ cm}^2$ . 2. 6 cm и 8 cm. 3.  $300 \text{ cm}^2$  и  $720 \text{ cm}^2$ .

#### 8.3.

1.  $V = 1755 \text{ cm}^3$ . 2.  $P = 72 \text{ cm}^2, V = 36 \text{ cm}^3$ . 3.  $V_1 = \frac{26}{27}V$ . 4.  $405 \text{ cm}^3$ . 5.  $360 \text{ cm}^3$ .

#### 8.4.

1.  $\sqrt{91} \text{ cm}$ . 2.  $100 \text{ cm}^2$ . 3.  $\sqrt{302} \text{ cm}$ . 4. 12 cm

#### 8.5.

1.  $\frac{880}{3} \text{ cm}^3$ . 2. 2,5 dm. 3.  $H = 24\sqrt{3} \text{ cm}, s = \sqrt{1729} \text{ cm}$ . 4.  $60 \text{ cm}^3$ . 5.  $112,5\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 6.  $192 \text{ cm}^3$

#### 8.6.

1.  $76\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 2.  $20 \text{ m}^2, 45 \text{ m}^2$ . 3.  $P = 324, V = 126\sqrt{7}$ . 4.  $1140 \text{ m}^3$

#### 8.7.

1. **а)** Првиот и третиот цилиндар имаат висина  $a$ , а вториот има висина  $2a$ , **б)** Радиусот на првиот цилиндар е  $a$ , а на вториот и третиот  $2a$ . 2. 30 cm. 3.  $36 \text{ cm}^2$

#### 8.8.

1.  $30 \text{ cm}^2$ . 2.  $960\pi \text{ cm}^3$ . 3.  $88\pi \text{ cm}^2$ . 4.  $200\pi \text{ cm}^2$ .

**8.9.**

1.  $48 \text{ cm}^2$  . 2.  $r = 2 \text{ cm}$ ,  $H = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  . 3.  $100 \text{ cm}^2$  . 4.  $20 \text{ cm}$  .

**8.10.**

1. а)  $96\pi \text{ cm}^2$  , б)  $980\pi \text{ cm}^2$  , в)  $2,24\pi \text{ cm}^2$  . 2.  $69 \text{ cm}$  . 3.  $243\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$  . 4.  $320\pi \text{ cm}^3$

**8.11.**

1.  $195\pi \text{ cm}^2$  . 2.  $400\pi \text{ cm}^2$  . 3.  $4,92l$  . 4.  $457\pi \text{ cm}^3$  .

**8.12**

1.  $R = 18 \text{ cm}$  . 2.  $P = 8739\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 34182\pi \text{ cm}^3$  .

**8.13.**

1.  $\frac{3}{4}\pi \text{ cm}^3$  . 2.  $18\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$  . 3.  $1620\pi \text{ cm}^2$  . 4.  $P = 552\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 1920\pi \text{ cm}^3$  .

**ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ**

1.  $54 \text{ cm}^2$  . 2. 3 . 3.  $127 \text{ cm}$  . 4.  $420 \text{ cm}$  . 5.  $17 \text{ cm}$  . 6. 4 . 7.  $109 \text{ cm}^3$  . 8.  $26 \text{ cm}^2$  . 9.  $8 \text{ cm}^3$  . 10.  $180 \text{ cm}^2$  . 11.  $10 \text{ cm}^2$  . 12.  $24 \text{ cm}^3$  . 13.  $120 \text{ cm}^2$  . 14.  $120 \text{ cm}^2$  . 15.  $36 \text{ cm}^3$  .

## СОДРЖИНА

|                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>ПРЕДГОВОР</b> .....                                                                                                               | 3  |
| <b>1. КОРЕНИ</b> .....                                                                                                               | 5  |
| 1.1. Поим за корен .....                                                                                                             | 5  |
| 1.2. Проширување и скратување корени .....                                                                                           | 7  |
| 1.3. Коренување на производ и количник .....                                                                                         | 8  |
| 1.4. Извлекување множител пред знакот на корен, внесување<br>множител под знакот на корен и нормален вид на корен .....              | 11 |
| 1.5. Операции со корени .....                                                                                                        | 14 |
| 1.6. Рационализација на именител на дробка .....                                                                                     | 17 |
| 1.7. Степен со показател рационален број .....                                                                                       | 18 |
| 1.8. Ирационални изрази .....                                                                                                        | 21 |
| <b>2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК</b> .....                                                                    | 26 |
| 2.1. Мерење на агли .....                                                                                                            | 26 |
| 2.2. Тригонометриски функции од остар агол .....                                                                                     | 28 |
| 2.3. Тригонометриски функции од комплементни агли .....                                                                              | 30 |
| 2.4. Вредности на тригонометриските функции на некои агли .....                                                                      | 32 |
| 2.5. Менување на вредноста на тригонометриските функции<br>зависно од аголот .....                                                   | 34 |
| 2.6. Врска меѓу тригонометриските функции од ист агол .....                                                                          | 35 |
| 2.7. Решавање на правоаголен триаголник .....                                                                                        | 38 |
| 2.8. Примена на решавање на правоаголен триаголник .....                                                                             | 40 |
| <b>3. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ</b> .....                                                                                                    | 42 |
| 3.1. Поим за комплексен број .....                                                                                                   | 42 |
| 3.2. Собирање и одземање на комплексни броеви .....                                                                                  | 44 |
| 3.3. Множење и делење на комплексни броеви .....                                                                                     | 47 |
| 3.4. Геометриско претставување на комплексен број.<br>Модул на комплексен број .....                                                 | 51 |
| <b>4. КВАДРАТНА РАВЕНКА</b> .....                                                                                                    | 55 |
| 4.1. Квадратна равенка и видови .....                                                                                                | 55 |
| 4.2. Решавање на неполна квадратна равенка .....                                                                                     | 56 |
| 4.3. Решавање на полна квадратна равенка .....                                                                                       | 59 |
| 4.4. Дискусија на решенијата на полна квадратна равенка .....                                                                        | 63 |
| 4.5. Виетови формули за врската меѓу корените и<br>коефициентите на квадратна равенка .....                                          | 66 |
| 4.6. Примена на Виетовите формули .....                                                                                              | 67 |
| 4.7. Примена на квадратна равенка .....                                                                                              | 70 |
| 4.8. Дробно рационални равенки .....                                                                                                 | 74 |
| <b>5. РАВЕНКИ ОД КВАДРАТЕН ВИД. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ. СИСТЕМ<br/>ОД ЕДНА КВАДРАТНА И ЕДНА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ</b> ..... | 80 |
| 5.1. Биквадратни равенки .....                                                                                                       | 80 |
| 5.2. Равенки што се сведуваат на квадратни со соодветна смена .....                                                                  | 83 |
| 5.3. Ирационални равенки .....                                                                                                       | 86 |

|                                                                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4. Решавање на ирационални равенки со метод на смена на променливата .....                                        | 91         |
| 5.5. Систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати .....                                                  | 93         |
| 5.6. Решавање на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати .....                                      | 96         |
| <b>6. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА, СИСТЕМ И ВКУПНОСТ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА .....</b> | <b>100</b> |
| 6.1. Поим за квадратна функција .....                                                                               | 100        |
| 6.2. Екстремни вредности и интервали на монотоност на квадратна функција .....                                      | 102        |
| 6.3. График на квадратна функција .....                                                                             | 106        |
| 6.4. Знак на квадратна функција .....                                                                               | 110        |
| 6.5. Квадратна неравенка со една непозната .....                                                                    | 113        |
| 6.6. Решавање квадратни неравенки со разложување .....                                                              | 116        |
| 6.7. Систем и вкупност од две квадратни неравенки со една непозната .....                                           | 118        |
| 6.8. Примена на систем квадратни неравенки .....                                                                    | 120        |
| <b>7. ВЕКТОРИ ВО РАМНИНА. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО ПРОСТОР .....</b>                                                   | <b>123</b> |
| 7.1. Поим за вектор .....                                                                                           | 123        |
| 7.2. Операции со вектори .....                                                                                      | 126        |
| 7.3. Примена на вектори .....                                                                                       | 130        |
| 7.4. Аксиоми за просторна геометрија .....                                                                          | 134        |
| 7.5. Заемен однос на права и рамнина во простор .....                                                               | 137        |
| 7.6. Заемен однос на две рамнини во простор .....                                                                   | 139        |
| 7.7. Заемен однос на две прави во простор .....                                                                     | 140        |
| <b>8. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА .....</b>                                                              | <b>143</b> |
| 8.1. Поим за призма .....                                                                                           | 143        |
| 8.2. Пресеци на призма со рамнина .....                                                                             | 145        |
| 8.3. Плоштина и волумен на призма .....                                                                             | 146        |
| 8.4. Пирамида. Пресеци на пирамида со рамнина .....                                                                 | 149        |
| 8.5. Плоштина и волумен на пирамида .....                                                                           | 152        |
| 8.6. Плоштина и волумен на потсечена пирамида .....                                                                 | 154        |
| 8.7. Цилиндар. Пресеци на цилиндар со рамнина .....                                                                 | 157        |
| 8.8. Плоштина и волумен на цилиндар .....                                                                           | 159        |
| 8.9. Конус. Пресеци на конус со рамнина .....                                                                       | 160        |
| 8.10. Плоштина и волумен на конус .....                                                                             | 163        |
| 8.11. Плоштина и волумен на потсечен конус .....                                                                    | 164        |
| 8.12. Сфера и топка. Плоштина и волумен .....                                                                       | 166        |
| 8.13. Ротациони тела .....                                                                                          | 170        |
| <b>ОДГОВОРИ И УПАТСТВА .....</b>                                                                                    | <b>175</b> |